Devoir surveillé 1 heures 03/10/2024.

Seuls les exercices 1 à 10 sont notés les exercices pourront, à la marge être pris en compte dans la notation.
Les questions sous forme de QCM doivent être justifiées. Seule la réponse choisie doit être justifiée.

Exercice 1. (8 points)

Déterminez la limite de la suite (u_n) sachant que $u_n = n^4\left(0,5^n + \frac{1}{n} - 1\right)$.

Exercice 2. (12 points)

Déterminez la limite de la suite (u_n) sachant que $u_n = \frac{n^5 - n^3 + 12}{n^4 + n}$.

Exercice 3. (6 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1$. Déterminer sa limite.

Exercice 4. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

On admet que (u_n) est croissante et $u_n \geqslant n + 1$ pour tout entier naturel n.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 5. (5 points)

Soit (u_n) une suite. On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 6. (4 points)

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$.
On peut alors affirmer que :

a. la suite (u_n) diverge ;
b. la suite (u_n) converge ;
c. $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$;
d. $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Exercice 7. (3 points)

Une suite (u_n) est minorée par 3 et converge vers un réel ℓ.
On peut affirmer que :

a. $\ell = 3$
b. $\ell \geqslant 3$
c. La suite (u_n) est décroissante.
d. La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 8. (4 points)

Soit (u_n) une suite telle que $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$. Démontrez que la suite est convergente. Que peut-on dire de sa limite ?

Exercice 9. (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. On admet que la suite converge et est croissante. Déterminez sa limite.

Exercice 10. (5 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

On peut affirmer que :

a. la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

b. la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

c. la suite (u_n) n'a pas de limite.

d. la suite (u_n) converge.

Exercice 11.

Déterminez la limite de la suite (a_n) définie par $a_n = \dfrac{1-3^n}{1+2^n}$.

Exercice 12.

La suite (w_n) est définie par $w_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif, $w_{n+1} = \dfrac{1}{n} w_n$.

a. La suite (w_n) est géométrique

c. $w_5 = \dfrac{1}{15}$

b. La suite (w_n) n'admet pas de limite

d. La suite (w_n) converge vers 0.

Exercice 13.

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). On sait que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3$.

On peut alors affirmer que :

a. la suite (v_n) converge ;

b. Si la suite (u_n) est croissante alors la suite (v_n) est minorée par u_0 ;

c. $1 \leqslant v_0 \leqslant 3$;

d. la suite (v_n) diverge.