

Devoir du 26/03/2024.

Exercice 4

1) Calculons $IP(J \cap S)$.

$IP(J) > 0$ donc, d'après la formule des probabilités composées:

$$IP(J \cap S) = IP(J) \times IP_S(S)$$

$$= \frac{60}{100} \times \frac{8}{9}$$

$$IP(J \cap S) = \frac{8}{15}$$

2) a) Calculons $IP(\bar{J} \cap S)$.

$\{J, \bar{J}\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales:

$$IP(S) = IP(J \cap S) + IP(\bar{J} \cap S)$$

donc:

$$\begin{aligned} IP(\bar{J} \cap S) &= IP(S) - IP(J \cap S) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{8}{15} \end{aligned}$$

$$IP(\bar{J} \cap S) = \frac{2}{15}$$

2) b) Calculons $IP(\bar{S})$

Par définition:

$$IP_{\bar{S}}(S) = \frac{IP(\bar{S} \cap S)}{IP(\bar{S})}$$

$$= \frac{2}{15}$$

$$= \frac{2}{1 - \frac{60}{100}}$$

$$IP_{\bar{S}}(S) = \frac{1}{3}$$

3) a) Choisir une personne est une épreuve de Bernoulli de succès "la personne pratique une activité sportive" et de paramètre $p = \frac{2}{3}$.

L'épreuve est répétée à l'identique et de façon indépendante $n = 30$ fois donc l'expérience est un schéma de Bernoulli.

X compte le nombre de succès donc:

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(30; \frac{2}{3}\right)$$

3) b) Calculons $IP(X=16)$

$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(30; \frac{2}{3}\right)$ donc:

$$IP(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

0,5 $IP(X=16) = \binom{30}{16} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{16} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{30-16}$

0,5 $IP(X=16) \approx 0,046$.

0,5 3) c) Nombre de personnes qui peuvent être invités: $\frac{10\,000}{380} = 26 + \frac{12}{380}$.

0,5 Calculons $IP(X \leq 26)$.

$IP(X \leq 26) \approx$

Donc la probabilité que le budget soit insuffisant est:

0,5 $IP(X > 26) = 1 - IP(X \leq 26)$

0,5 $IP(X > 26) \approx 0,003$

Exercice 2

0,25 A 1) def suite(n):
 $n = 3$
 for ~~ia~~ in range(n):
 $n = 4 / (5 - n)$
 return n.

0,25 A 2) $u_1 = \frac{4}{5-3} = 2$

0,25 et $u_2 = \frac{4}{5-2} = \frac{4}{3} = 1,333...$



A3) D'après l'affichage:

0,25
0,25

(u_n) semble décroissante et
semble converger vers 1.

B1) Étudions les variations de f .

0,25
0,25

$$f = \frac{u}{v} \quad \text{où} \quad u(x) = 4 \quad \text{et} \quad v(x) = 5 - x.$$

u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et v s'annule
en 5 donc $\frac{u}{v}$ est dérivable sur $] -\infty; 5[$

0,25

$$\text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

0,25

Où $u'(x) = 0$ et $v'(x) = -1$ donc,
pour $x \in] -\infty; 5[$:

0,25

$$f'(x) = \frac{0 \times (5 - x) - 4 \times (-1)}{(5 - x)^2}$$

0,25

$$= \frac{4}{(5 - x)^2}$$

0,25
0,25

$f' \geq 0$ donc: f est croissante sur $] -\infty; 5[$

0,25

B2) Démontrons par récurrence que
" $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$ " pour tout $n \in \mathbb{N}$.

0,25

* Hérité. 8.

0,25

Soit $k \in \mathbb{N}$.

0,25 Supposons que $1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$ et
0,25 démontrons que: $1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$.

0,25 Par hypothèse de récurrence:
 $1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$.

0,25 Puisque f est croissante sur $] -\infty; 5[$:
 $f(1) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(4)$

0,25 Or $f(1) = 1$ et $f(4) = 4$ donc:
 $1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$.

0,25 * Initialisation.

0,25 $u_0 = 3$ et $u_1 = 2$ donc $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 4$.

0,25 * Conclusion.

0,25 L'hérédité et l'initialisation étant établies
nous avons démontré que

$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

0,25 3) a) $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{4}{5-x} = x$

0,25 $\Leftrightarrow 4 = x(5-x)$ car $x < 5$
 $\Leftrightarrow 4 = 5x - x^2$
 $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

0,25
0,25
0,25
0,25
0,25
0,25

3) b) D'après la question précédente les solutions de $f(x) = x$ sont les racines du trinôme de degré deux $x^2 - 5x + 4$. Or 1 et 4 en sont des racines évidentes donc

l'ensemble des solutions de $f(x) = x$ est $\{1; 4\}$.

0,25
0,25

4) D'après B2), (u_n) est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la limite monotone :

(u_n) converge.

0,25

De plus, en passant à la limite dans la formule de récurrence de (u_n) nous voyons que sa limite l vérifie : $f(l) = l$.

Autrement dit $l \in \{1; 4\}$, d'après 3).

0,25

Comme (u_n) est décroissante, bornée par 1 et 4 et que $u_0 = 3$, nécessairement :

0,25

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

0,25
0,25

5) Si $u_0 = 4$ alors $(u_n)_n$ est constante égale à 4, et donc
si $u_0 = 4$, (u_n) converge vers 4.