Cardinal.

Dans cette leçon n et p désignent des entiers naturels non nuls.

Ensembles finis.

EXERCICE 1. Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p. $f : E \to F$ une application.

Conjecturez la comparaison de $|E|$ et $|F|$ dans les cas suivants :

1. si $E \subset F$,
2. si f est injective,
3. si f est surjective,
4. si f est une bijection.

EXERCICE 2. Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

Comparez $|E|$, $|F|$, $|E \cap F|$ et $|E \cup F|$?

EXERCICE 3. Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

Soit $f : E \to F$ une application.

Montrez que f est bijective si et seulement si deux des conditions suivantes sont vraies.

(i) f est surjective,

(ii) f est injective,

(iii) $n = p$

EXERCICE 4. Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

1. Déterminez le nombre d'applications de E dans F en fonction de n et p.
2. Déterminez le nombre de permutations de E en fonction de n. *Une permutation de E est une bijection de E sur E.*
3. En supposant que $n \leq p$, déterminez le nombre d'injections de E dans F.

Indication. Vous pourrez avantageusement représenter la situation avec des arbres.

EXERCICE 5. Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

Si F est une partie de E alors le *complémentaire* de F dans E, et on note $\overline{F}$ ou $\complement_E F$, est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas éléments de F : $\overline{F} = \{x \in E | x \notin F\}$.

Conjecturez, si $F \subset E$, l'expression de $\left|\overline{F}\right|$ en fonction de n et p.

EXERCICE 6. Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

Exprimez $|E \times F|$ en fonction de n et p.

EXERCICE 7. Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \geq 3$ un entier naturel.

Exprimez $|E^p|$ en fonction de n et p.

EXERCICE 8. Soit E un ensemble fini de cardinal n.

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties (sous-ensembles) de E. Par exemple si $E = \{a,b,c\}$ alors

$$\mathcal{P}(E) = \{\ \varnothing\ ,\ \{a\}\ ,\ \{b\}\ ,\ \{c\}\ ,\ \{a,b\}\ ,\ \{b,c\}\ ,\ \{a,c\}\ ,\ E\ \}\,;$$

dans cet exemple $\text{card}\,(\mathcal{P}(E)) = 8$.

Conjecturez l'expression de $\text{card}\,(\mathcal{P}(E))$ en fonction de n.

Ensembles infinis.

EXERCICE 9. Démontrez que l'ensemble des nombres premiers est infinis.

EXERCICE 10. Exprimez avec des quantificateurs le fait qu'un ensemble E n'est pas fini.

EXERCICE 11. Démontrez que les ensembles suivants ont le même cardinal que $\mathbb{N}$: $\mathbb{N}^*$, l'ensemble des entiers naturel pairs, l'ensemble des entiers naturels impairs.