13 Variables aléatoires, inégalités de concentration.

I Variables aléatoires et moments.

Notion de variable aléatoire finie.

EXERCICE 1. Déterminez le support de la variable aléatoire dans les cas suivants.

a) Une loterie est organisée. Cent tickets numérotés de 1 à 100 sont vendus. Les tickets 1 à 5 permettent de gagner le premier lot d'une valeur de 80 €. Les ticket 6 à 15 permettent de gagner un second lot d'une valeur de 30 €. Soient X la variable aléatoire qui à un ticket associe son numéro et Y la variable aléatoire qui à un ticket associe la valeur du lot gagné.

b) Une puce se déplace sur une droite graduée en partant de l'origine et en faisant des bonds aléatoires de longueur 1 vers la gauche ou vers la droite. On note X_1 la variable aléatoire qui indique la position de la puce sur l'axe gradué au bond d'un bond. Plus généralement on note X_i la variable aléatoire indiquant la position de la puce au terme de $i \in \mathbb{N}^*$ bonds.

Somme de variables aléatoires.

EXERCICE 2. On lance deux dés tétraédriques équilibrés dont les faces sont numérotées 1, 1, 2 et 2 pour le premier et 1, 2, 3 et 3 pour le second. On note X la variable aléatoire qui à chaque lancé du premier dé associe le numéro inscrit sur la face inférieure et Y celle pour le second dé. Soit $Z = X + Y$. Déterminez la loi de Z.

EXERCICE 3. Soient $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{3}\right)$, $Y \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{4}\right)$ et $Z = X + Y$.

1. Calculez $\mathbb{P}(Z = 1)$.
2. Déterminez la loi de Z.
3. Calculez $\mathbb{P}_{Z=1}(X = 1)$.
4. Calculez $\mathbb{P}_{X=1}(Z = 2)$.

Indépendance de variables aléatoires.

Espérance.

Variance et écart-type.

EXERCICE 4. Une agence constate que le nombre d'appartements vendus chaque mois est une variable aléatoire X dont la loi peut être estimée statistiquement :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,02	0,06	0,08	0,25	0,2	0,13	0,12	0,08	0,06

Elle a constaté que les ventes des mois successifs étaient indépendantes.

1. Calculez l'espérance et l'écart-type du nombre annuel d'appartements vendus.
2. L'agence touche 1000 € pour la vente d'un appartement et les charges fixes annuelles s'élèvent à 50 000 €. Calculez l'espérance et la variance du bénéfice annuel de l'agence.

EXERCICE 5. On admet que la demande journalière de véhicules est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par

x_i	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,22	0,37	0,24	0,10	0,05	0,02

On suppose que les 3 véhicules de l'agence sont en état de marche.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de véhicules loués à la journée.

1. Déterminez la loi de Y.
2. Calculez l'espérance et la variance de Y.
3. Le prix de la location par jour et par voiture est de 50 €. Les frais supportés par l'agence sont en moyenne de 10 € par voiture et par jour, que le véhicule soit loué ou non, et de 10 € par véhicule loué.
   (a) Exprimez la variable aléatoire B égale au bénéfice journalier en fonction de Y.
   (b) Calculez l'espérance et la variance de B.

Exercices.

EXERCICE 6. Déterminez l'espérance et la variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $[\![1,n]\!]$.
EXERCICE 7. Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle. Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu.

1. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.
2. En réalité, la soirée était bien arrosée, et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

EXERCICE 8. À un péage autoroutier $n \in \mathbb{N}^*$ voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1 (resp. X_2, X_3) les variables aléatoires donnant le nombre de voitures ayant franchi la barrière 1 (resp. 2, 3).

1. Déterminez la loi de X_1.
2. Calculez les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.

II Échantillon de taille n d'une variable aléatoire.

Échantillon de taille n.

EXERCICE 9. On étudie la marche aléatoire d'une particule se déplaçant sur les points d'abscisses entières d'un axe gradué d'origine O. La particule est à l'origine au temps 0 et se déplace de chaque unité de temps d'une unité vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou d'une unité vers la gauche avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On suppose les déplacements de la particule indépendants les uns des autres. Pour tout entier naturel k non nul on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le k-ième déplacement a lieu vers la droite et qui vaut -1 dans le cas contraire. Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n l'abscisse de la particule à l'instant n.

1. Donnez, pour tout entier naturel non nul k l'espérance et la variance de X_k.
2. Pour tout entier naturel non nul n, exprimer S_n en fonction de certaines des variables X_k.
3. En déduire l'espérance et la variance de S_n.

EXERCICE 10. Une machine remplit des pots de yaourts dont la masse en grammes est une variable aléatoire Y d'espérance 125 et d'écart-type 1,2. On suppose que les remplissages des pots sont indépendants.

1. Exprimez la masse d'un lot de 16 comme la variable aléatoire somme S_{16} d'un échantillon de 16 pots.
2. Déterminez l'espérance de S_{16}.
3. Montrez que l'écart-type de S_{16} est 4,8.

Application à la loi binomiale.

EXERCICE 11. Une étude statistique a été réalisée sur le temps d'attente en secondes subi par la clientèle avant d'être mise en communication avec un standardiste. La variable aléatoire T qui a tout client associe son temps d'attente a pour espérance 18 et pour écart-type 7. On estime que la probabilité qu'un client ait une attente de plus de 20 s est de 0,4.

1. Au cours d'une même semaine un client passe 5 appels indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de fois que l'appel à dépassé 20 s. Déterminez l'espérance et l'écart-type de X.
2. Dans le but de diminuer le temps d'attente, on effectue une enquête sur un échantillon de 100 clients. Soit Y la variable aléatoire exprimant le temps d'attente moyen en secondes pour un échantillon de 100 clients. Déterminez l'espérance et l'écart-type de Y.

EXERCICE 12. On interroge de manière indépendante 300 personnes lors d'un sondage sur la réalisation d'un projet d'urbanisme. On note X_i la variable aléatoire qui vaut 0 si la i-ième personne interrogée est opposée au projet et 1 si elle y est favorable ; la probabilité qu'elle soit opposée au projet est 0,365.

1. Donnez la loi de probabilité des X_i.
2. On note $S = X_1 + \cdots + X_{300}$. Donnez en justifiant la loi de probabilité de la variable aléatoire S puis calculez et interprétez $\mathbb{P}(S > 100)$.

Exercices.

EXERCICE 13. Une machine produit des joints dont l'épaisseur définit une variable aléatoire X d'espérance 2 mm et d'écart-type 0,1 mm. Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

1. Déterminez l'espérance de M_n.
2. Calculez l'écart-type de M_{100} puis de $M_{10\,000}$.

EXERCICE 14. Dans une population d'adultes la variable aléatoire X associe à chaque individu sa glycémie en milligrammes par 100 millilitres. On suppose que X a pour espérance 92 et pour écart-type 7. Soit M_{400} la variable aléatoire d'un échantillon de taille 400 de la variable aléatoire X. Déterminez l'espérance et l'écart-type de M_{400}.

EXERCICE 15. Sur des paquets de cartes à collectionner il est écrit que 20 % des paquets comportent une et une seule carte rare.

1. Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire C qui à chaque paquet associe le nombre de cartes rares.
2. On achète 12 paquets : le nombre de cartes rares de ce lot est modélisé par un échantillon de taille 12 de la variable aléatoire C, noté $(C_1, \ldots, C_{12})$. Expliquez pourquoi il est plausible d'affirmer que les variables aléatoires formant cet échantillon sont indépendantes.
3. Déterminez la loi de probabilité de $L = C_1 + \cdots + C_{12}$.
4. A-t-on plus de 50 % de chance d'avoir récupéré 4 cartes rares ?

EXERCICE 16. La masse en grammes d'un paquet de café est donnée par un variable aléatoire C d'espérance 250 et de variance 4. Soit L la variable aléatoire donnant la masse en grammes d'un lot de deux paquets. On suppose les masses des deux paquets indépendantes entre elles. Déterminez $\mathbb{E}(L)$ et $\mathbb{V}(L)$.

EXERCICE 17. Afin de mieux sécuriser les achats en ligne, certaines cartes bancaires ont un cryptogramme dynamique : ce code de sécurité qui figure au dos de la carte change chaque heure de manière « aléatoire » : chaque cryptogramme est composé de trois chiffres et les combinaisons de trois chiffres identiques, comme 111 ou 888 sont exclues.

1. Combien de cryptogrammes différents la carte bancaire peut-elle générer ?
2. Combien de cryptogrammes comporte deux fois le même chiffre ?
3. On note D la variable aléatoire valant 1 si le cryptogramme comportent deux fois le même chiffre et 0 sinon. Établissez la loi de probabilité de la variable aléatoire D.
4. $(D_1, \ldots, D_{24})$ est un échantillon de taille 24 de la variable aléatoire D et $S = D_1 + \cdots + D_{24}$. Calculez $\mathbb{P}(S \geqslant 2)$.

EXERCICE 18. On réalise des semis dans des pots séparés et cultivés dans les mêmes conditions et on constate qu'ils survivent au bout de 2 mois dans 78 % des cas.

1. On note V la variable aléatoire qui à chaque semis associe 1 s'il est vivant au bout de deux mois et 0 sinon. Établissez la loi de V.
2. 500 semis ont été plantés. on les modélise par un échantillon $(V_1, \ldots V_{500})$ de taille 500 de V et on note $S = V_1 + \cdots + V_{500}$. Déterminez la loi de probabilité de S.
3. Calculez la probabilité $\mathbb{P}(S > 400)$ et interprétez ce résultat.

EXERCICE 19. Le jeu des mille euros est un jeu radiophonique au cours duquel une équipe de deux candidats doit répondre successivement à six questions de difficulté progressive : trois questions bleues, deux questions blanches et une question rouge. On estime que la probabilité de répondre juste à une question bleue est 0,95, celle de répondre juste à une question blanche est de 0,90 et celle de répondre juste à une question rouge est de 0,80. Les questions sont indépendantes entre elles. On note X la variable aléatoire qui, à une équipe, associe le nombre de réponses justes aux questions bleues, Y la variable aléatoire qui, à une équipe, associe le nombre de réponses justes aux questions blanches, et Z la variable aléatoire qui, à une équipe, associe 1 si elle répond juste à la question rouge et 0 sinon.

1. Déterminez les lois suivies par X, Y et Z.
2. Déterminez l'espérance et la variance de chacune de ces variables aléatoires.
3. On appelle R la variable aléatoire qui, à une équipe, associe le nombre total de réponses justes. Déterminez l'espérance et la variance de R.
4. Les candidats qui ont 6 bonnes réponses justes accèdent directement à la question Banco, et ceux qui ont 5 réponses justes passent par un repêchage pour accéder au Banco. On estime que la probabilité de répondre correctement à la question de repêchage est de 0,8.
   (a) Illustrez la situation par un arbre pondéré.
   (b) Quelle est la probabilité d'accéder directement à la question Banco ?
   (c) Quelle est la probabilité de passer par un repêchage ?
   (d) Quelle est la probabilité d'accéder au Banco ?
5. La probabilité de répondre juste à la question Banco est de 0,4. Quelle est la probabilité pour une équipe de candidats qui se présente au jeu, de remporter le Banco ?

EXERCICE 20.

III Concentration, loi des grands nombres.

Inégalités de concentration.

EXERCICE 21. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. Montrez que, pour tout $c \in]\!]0,n[\![$: $\frac{\mathbb{E}(X)-c}{n-c} \leqslant \mathbb{P}(X \geqslant c) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)-1}{c-1}$.

EXERCICE 22.

On lance 3 600 fois une pièce non truquée. On note X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus.

1. Écrivez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dans ce cas.
2. Minorez la probabilité que le nombre d'apparition de piles soit strictement compris entre 1 600 et 2 000.

EXERCICE 23.

On note X le nombre d'avions atterrissant sur un aéroport sur le créneau horaire 14h-15h. On estime qe $\mathbb{E}(X) = 16$ et $\mathbb{V}(X) = 4$.

1. Écrivez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à X.
2. Déterminez une minoration de la probabilité qu'il arrive entre 12 et 20 avions sur cet aéroport entre 14h et 15h.

EXERCICE 24.

On considère une variable aléatoire X l'espérance μ et d'écart-type σ.

1. Écrivez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à X.
2. Déterminez les valeurs de σ pour que nous ayons $\mathbb{P}(|X-\mu| < 15) \geqslant 0{,}96$.

EXERCICE 25.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'objets produits par une entreprise. On sait que $\mathbb{E}(X) = 50$ et $\mathbb{V}(X) = 25$.

1. (a) Justifiez que $\mathbb{P}(X \geqslant 75) \leqslant \mathbb{P}(|X-50| \geqslant 25)$.
   (b) Majorez la probabilité que la production du mois à venir dépasse 75 objets.
2. Minorez la probabilité que la production du mois à venir soit strictement comprise entre 40 et 60 matelas.

EXERCICE 26.

Un avion peut transporter 100 passagers et leurs bagages. Sans les passagers, ni les bagages, mais avec l'équipage et le carburant il pèse 120 tonnes. Les consignes de sécurité interdisent le décollage de l'appareil si le poids dépasse 129,42 tonnes. Les 100 places sont occupées.

Le poids d'un voyageur suit une loi d'espérance 70 kg et d'écart-type 10 kg. Le poids de ses bagages suit une loi d'espérance 20 kg et d'écart-type 10 kg. Toutes ces variables sont supposées indépendantes.

1. (a) Calculez l'espérance du poids de l'avion au décollage.
   (b) L'espérance calculée est-elle conforme aux normes de sécurité ?
2. Calculez l'écart-type du poids total de l'appareil.
3. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouvez un majorant de la probabilité pour que le poids réel de l'appareil au décollage dépasse 129,42 tonnes.

EXERCICE 27.

On effectue n tirages successifs avec remise d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. Notons X la variable aléatoire qui à un tirage associe 1 si boule tirée est rouge et 0 sinon. Notons encore M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

1. Déterminez $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ puis donnez l'inégalité de concentration relative à M_n.
2. À partir de quel nombre de tirages pouvons-nous garantir à plus de 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera strictement entre 0,35 et 0,45.

EXERCICE 28.

Une épreuve consiste à tirer au hasard 10 jetons avec remise dans un sac contenant 40 % de jetons bleus. On appelle X la variable aléatoire qui, à cette série de tirages, associe le nombre de jetons bleus obtenus.

1. (a) Justifiez que X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,4.
   (b) Déterminez l'espérance de X.
   (c) Montrez que la variance de X est 2,4.
2. Montrez en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que $\mathbb{P}(|X-4| \geqslant 2) \leqslant 0{,}6$.
3. (a) Quel est l'événement contraire de l'événement $\{|X-4| \geqslant 2\}$?
   (b) Montrez que $\mathbb{P}(|X-4| < 2) \geqslant 0{,}4$.

EXERCICE 29.

Soit T la variable aléatoire qui à chaque enfant français de 1 an associe sa taille en centimètre.

Des statistiques permettent d'estimer que cette variable a pour espérance 50 et pour écart-type 2.

1. Déterminez l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de T de taille 10 000.
2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorez la probabilité que cette taille moyenne s'écarte de 50 cm d'au moins 0,1 cm.

EXERCICE 30.

Loi faible des grands nombres.

Exercices.

EXERCICE 31.
EXERCICE 32.
EXERCICE 33.
EXERCICE 34.
EXERCICE 35. On souhaite estimer l'équilibre d'une pièce. On note p la probabilité (inconnue) que la pièce tombe sur pile. On lance n fois la pièce et on note S_n le nombre de lancers ayant donné pile. À partir de combien de lancers peut-on supposer que $\frac{S_n}{n}$ est une approximation de p à 0,01 près avec une probabilité supérieure à 95 % ?
EXERCICE 36. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes avec X_n suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_n. Montrez que pour tout $\varepsilon > 0$: $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) = 1$.