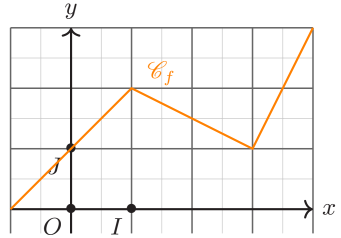
12 Calcul intégral.

I L'intégrale.

EXERCICE 1. On considère une fonction f dont la courbe représentative est dessinée ci-dessous.



Déterminez

a) $I_1 = \int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t$.

b) $I_2 = \int_{1}^{2} f(t)\ \mathrm{d}t$.

c) $I_3 = \int_{2}^{3} f(t)\ \mathrm{d}t$.

d) $I_4 = \int_{-1}^{3} f(t)\ \mathrm{d}t$.

EXERCICE 2. m, a et b sont des réels avec $m > 0$ et $a < b$.

a) $\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_2^3 m\ \mathrm{d}t$.

b) $\mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_a^b m\ \mathrm{d}t$.

c) $\mathscr{A}_3 = \displaystyle\int_1^2 t\ \mathrm{d}t$.

d) $\mathscr{A}_4 = \displaystyle\int_{-1}^{1} -x + 1\ \mathrm{d}x$.

e) $\mathscr{A}_5 = \displaystyle\int_2^2 4x\ \mathrm{d}x$.

f) $\mathscr{A}_6 = \displaystyle\int_{-100}^{100} 0\ \mathrm{d}x$.

EXERCICE 3. Soit f la fonction affine par morceaux définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + 1, \text{ si } x \leqslant 2 \\ -2x + 6 \text{ sinon.} \end{cases}$

Au moyen de considérations géométriques élémentaires, calculez l'aire $\mathscr{A} = \int_0^3 f(t)\ \mathrm{d}t$ de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

II Théorèmes fondamentaux de l'analyse.

EXERCICE 4. Démontrez que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x - 3)\mathrm{e}^{-x}$, est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f, définie par $f(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$. Déduisez-en la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (2t + 1)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

EXERCICE 5. Calculez les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{3}{x}\ \mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_0^2 -4t^2 + 1\ \mathrm{d}t$.

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 + s)^2\ \mathrm{d}s$.

d) $\displaystyle\int_0^{1/2} \mathrm{e}^{2y}\ \mathrm{d}y$.

e) $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$.

f) $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{u + 2}\ \mathrm{d}u$.

g) $\displaystyle\int_1^2 \frac{-2}{x^3}\ \mathrm{d}x$.

h) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(y)\ \mathrm{d}y$.

i) $\displaystyle\int_0^2 -2t^3 + 4t^2 - 5t\ \mathrm{d}t$.

j) $\displaystyle\int_{10}^{12} \frac{2u}{u^2 - 8}\ \mathrm{d}u$.

k) $\displaystyle\int_1^2 6x(x^2 + 4)^3\ \mathrm{d}x$.

l) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} 3\sin\left(3y + \frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{d}y$.

m) $\displaystyle\int_0^1 -3\mathrm{e}^{-3x}\ \mathrm{d}x$.

n) $\displaystyle\int_0^{1/2} \pi\sin(\pi x)\ \mathrm{d}x$.

o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{-1}{(1 + y)^2}\ \mathrm{d}x$.

p) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 15t^4(t^5 + 2)^3\ \mathrm{d}t$.

q) $\displaystyle\int_4^{25} \frac{5}{\sqrt{x}} + 3x\ \mathrm{d}x$.

r) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \cos(\pi x)\ \mathrm{d}x$.

s) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\ \mathrm{d}x$.

t) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{2t + 1}}\ \mathrm{d}t$.

u) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x} + 1}\ \mathrm{d}x$.

v) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^4}{(t^5+3)^3}\,\mathrm{d}t.$ w) $\int_1^2 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$ x) $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x.$

y) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x.$ z) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x.$

EXERCICE 6.

a) $\displaystyle\int_0^1 -3x+2\,\mathrm{d}x.$ b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$ c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\,\mathrm{d}x.$ e) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^2+2x\,\mathrm{d}x.$ f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x.$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3x+2}\,\mathrm{d}x.$ h) $\displaystyle\int_{-1}^1 t^2+2t-1\,\mathrm{d}x.$ i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{u}{2}\right)\,\mathrm{d}u.$

j) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3y)\,\mathrm{d}y.$ k) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2}{z^3}\,\mathrm{d}z.$ l) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2t)-\sin(t)\,\mathrm{d}t.$

m) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin(3x)-4\cos(x)\,\mathrm{d}x.$ n) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}x.$ o) $\displaystyle\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{-2x+1}\,\mathrm{d}x.$

p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{5}{2x-3}\,\mathrm{d}x.$ q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-3}{5}\,\mathrm{d}x.$ r) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x.$

s) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$ t) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$

EXERCICE 7. Calculez les intégrales.

a) $\displaystyle\int_0^4 t-3\,\mathrm{d}t.$ b) $\displaystyle\int_{-1}^2 t^2-4t+3\,\mathrm{d}t.$ c) $\displaystyle\int_1^2 t^2+t-\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$

d) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$ e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t.$ f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2t)\,\mathrm{d}t.$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t+2)^3}\,\mathrm{d}t.$ h) $\displaystyle\int_0^1 5t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$ i) $\displaystyle\int_{\ln(a)}^{\ln(b)} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t,\ 0<a\leqslant b.$

j) $\displaystyle\int_0^2 5\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t.$ k) $\displaystyle\int_1^9 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$ l) $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}u}{(2u+1)^2}.$

m) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5-x}}.$ n) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)(x^2+x+1)\,\mathrm{d}x.$ o) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{3x+2}.$

p) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{3t-4}\mathrm{d}t.$ q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+3t}}.$ r) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

s) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{t^3}{t^4+2}\,\mathrm{d}t.$ t) $\displaystyle\int_0^1 (x-2)(x^2-4x+1)^2\,\mathrm{d}x.$ u) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$

v) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t.$ w) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$ x) $\displaystyle\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t.$

III Intégrales, propriétés.

EXERCICE 8. Écrivez chaque expression à l'aide d'une seule intégrale.

a) $\displaystyle\int_{-4}^6 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-5}^{-4} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x.$ b) $\displaystyle\int_{10}^{14} g(t)\,\mathrm{d}t-\int_5^0 g(t)\,\mathrm{d}t+\int_5^{10} g(t)\,\mathrm{d}t.$

c) $\displaystyle 3\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x+5\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x.$ d) $\displaystyle -4\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x-5\int_5^3 g(x)\,\mathrm{d}x.$

EXERCICE 9. Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{2x^2+x}{x+1}$.

1. Démontrez : $\forall x\in]-1,+\infty[,\ f(x)=2x-1+\frac{1}{x+1}$.

2. Calculez $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Déterminez une valeur approchée de I.

EXERCICE 10. On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x+6}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

1. Démontrez que : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3}$.
2. Calculez $I = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 11. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Montrez que : $\forall x \in [1;3],\ \frac{1}{10} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
2. Déduisez-en que $\frac{1}{5} \leqslant \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$.

EXERCICE 12. f est la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Montrez que : $\forall x \in [0;15],\ 1 \leqslant f(x) \leqslant 4$.
2. Déduisez-en un encadrement de $\int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 13.

1. Montrez que : $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.
2. Déduisez-en que : $\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.

EXERCICE 14. Montrez que : $0 \leqslant \int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}-1$.

EXERCICE 15. On souhaite calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$. Posons $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$.
Calculez J, puis $I+J$ et déduisez-en I.

EXERCICE 16. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$.
Montrez que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

IV Valeur moyenne d'une fonction.

EXERCICE 17. Démontrez que $-2 \leqslant \int_1^3 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \leqslant 2$.

EXERCICE 18. Soit f la fonction définie sur $[-1;0]$ par $f(x) = \frac{3x+4}{(x+2)^2}$.

1. Dressez le tableau de variation de f.
2. Déduisez-en un encadrement de $f(x)$ sur $[-1;0]$.
3. Montrez que $1 \leqslant \int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{9}{8}$.

EXERCICE 19. On considère la suite, définie pour tout entier $n \geqslant 3$ par : $u_n = \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Étudiez la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.
2. Déduisez-en un encadrement de u_n pour chaque $n \geqslant 3$.
3. Concluez quant à la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

EXERCICE 20.

1. En considérant la fonction inverse justifiez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$.
2. Déduisez-en que, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} \leqslant \ln(n+1) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.
3. Déduisez en la convergence ou la divergence de $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. *Cette suite de somme est appelée la série harmonique.*
4. Proposez un algorithme en Python qui donne un encadrement de $\ln(n)$ pour n un entier naturel non nul.

EXERCICE 21. Lors d'une épidémie de grippe, le nombre de malades, t jours après l'apparition des premiers cas, est modélisé par la fonction f définie sur $[0;6]$ par $f(t) = 6t^2 - t^3$.

1. Calculez la valeur moyenne μ de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.
2. Donnez une interprétation de ce résultat.

EXERCICE 22. Un mobile est étudié sur l'intervalle de temps $[0;20]$. le temps est exprimé en secondes. La vitesse du mobile en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, est donné par : $v(t) = 2t^2 + 3t$.

1. Calculez la valeur moyenne de la fonction v sur $[0;20]$.
2. Que représente cette valeur moyenne ?

EXERCICE 23. Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la progression.

On note $f(t)$ la concentration dans le sang (en mg/L) en fonction du temps (en heures) d'un antibiotique administré en une seule dose à un animal, t appartenant à l'intervalle $[0;24]$.

On admet que pour t dans cet intervalle $f(t) = \frac{50t}{t^2+4}$.

Calculez la concentration moyenne de l'antibiotique pendant les 10 premières heures. Donnez la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.

EXERCICE 24. Soit $I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n : x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-x}$.

1. Conjecturez le sens de variation de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ puis démontrez-le.
2. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ et déduisez-en la limite de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

EXERCICE 25.

1. Démontrez que pour tout $x \in [0;1]$: $0 \leqslant x\mathrm{e}^{-x} \leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}$.
2. Déduisez-en que $0 \leqslant \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

EXERCICE 26. Pour n un entier naturel non nul on pose : $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n\, \mathrm{d}x$ et $J_n = \int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} (\ln(x))^n\, \mathrm{d}x$.

1. Justifiez que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
2. Quel est le sens de variation de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

EXERCICE 27. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int 0^1 \frac{x^n}{1+x}\, \mathrm{d}x$.

1. Calculez u_0.
2. (a) Démontrez que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.
   (b) Déduisez-en la valeur de u_1.
3. Démontrez que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

EXERCICE 28. Soient $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites définies par $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\, \mathrm{d}x$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\, \mathrm{d}x$.

1. (a) Justifiez que pour tout $x \in [0;1]$: $\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.
   (b) Montrez que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 1.
2. (a) Montrez que, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (b) Déduisez-en la limite de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. (a) Calculez pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + J_n$.
   (b) Déterminez la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 29.

V Intégration par parties.

EXERCICE 30. À l'aide d'une intégration par parties calculez les intégrales suivantes.

a) $\int_0^{\pi} t\sin(t)\ \mathrm{d}t$. b) $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$. c) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-2x}\ \mathrm{d}x$.

EXERCICE 31. En procédant à deux intégrations par parties calculez $I = \int_0^{\pi} x^2\sin(x)\ \mathrm{d}x$.

EXERCICE 32. Calculez $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\sin(x)\ \mathrm{d}x$.

EXERCICE 33. Une entreprise produit x centaines d'objets chaque semaine. Le coût de production exprimé en milliers d'euros, est défini sur l'intervalle $[0;5]$ par la fonction C telle que : $C(x) = (4x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. En utilisant une intégration par parties, calculez la valeur moyenne de la fonction C sur l'intervalle $[0;5]$. Vous arrondirez le résultat à 10^{-3} près.
2. Quelle interprétation peut-on faire du résultat précédent pour l'entreprise ?

EXERCICE 34. Calculez $I = \int_0^1 (2t-1)\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$, $J = \int_0^{\mathrm{e}} t^2(1-2\ln(t))\ \mathrm{d}t$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2t-1)\sin(t)\ \mathrm{d}t$.

EXERCICE 35. Notons $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2t-3)\cos^2(t)\ \mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2t-3)\sin^2(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Calculez $I+J$.
2. Calculez $I-J$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Déduisez-en les valeurs de I et J.

EXERCICE 36. Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers strictement positifs.

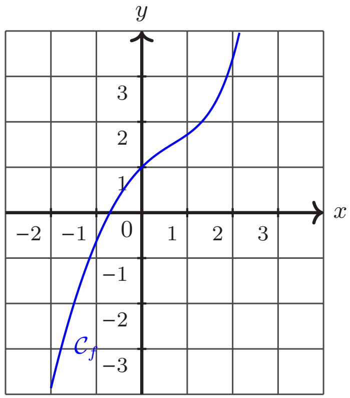
Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\ \mathrm{d}x$.

1. (a) Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1\,;\,\mathrm{e}[$, et pour tout n entier naturel, on a : $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$.
   (b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
2. (a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.
   (c) En déduire I_2, I_3 et I_4. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e, et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.
3. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geqslant 0$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n \leqslant \mathrm{e}$.
   (c) En déduire la limite de I_n.
   (d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

EXERCICE 37. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $x_n = \int_0^1 t^n\cos(t)\ \mathrm{d}t$ et $y_n = \int_0^1 t^n\sin(t)\ \mathrm{d}t$.

1. (a) Justifiez que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.
   (b) Étudiez le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Déduisez-en que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. (a) Démontrez que pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (b) Déduisez-en la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. (a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.
   (b) Déduisez-en la limite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 38. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x^2$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, est donnée sur le graphique ci-dessous à compléter.



On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - x$ et on note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans le même repère.

Partie A : Remarques préliminaires concernant la fonction f

1. Sans chercher à déterminer son équation, tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par O. On notera A son point de contact avec $\mathcal{C}_f$. Évaluer graphiquement le coefficient directeur de cette tangente en expliquant le procédé utilisé.
2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. En déduire une interprétation graphique du nombre réel : $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - \dfrac{7}{3}$.

Partie B : Étude de la fonction g

1. Étudier les limites de g en $+\infty$ et en 0 et justifier que $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote.
2. (a) Calculer la dérivée $g'(x)$ et montrer qu'elle est du signe de $(x-1)\mathrm{e}^x - x^2$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Soit u la fonction qui à tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ associe $u(x) = (x-1)\mathrm{e}^x - x^2$. Étudier le sens de variation de u sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Déterminer le signe de $u(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 1[$.
   (d) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique a sur l'intervalle $[1\ ;\ 2]$.
   En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $u(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (e) En déduire le signe de $g'(x)$ et dresser la tableau de variation de g.

Partie C : Construction de $\mathcal{C}_g$

1. On se propose de construire le point $S(a\ ;\ g(a))$ où a est le réel déterminé dans la question B. 2. d.
   (a) Montrer que, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = 0$ équivaut à $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ et que par conséquent $f'(a) = \dfrac{f(a)}{a}$.
   (b) En utilisant ce résultat, établir que a est l'abscisse du point A défini dans la première partie.
   (c) Justifier que l'ordonnée de S est $f'(a)$ et placer S sur le dessin.

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
3. Construire la courbe $\mathcal{C}_g$.

Partie D : Étude d'une primitive de g et calcul d'une intégrale

Soit G la primitive de g sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ qui s'annule pour $x = 1$ (on ne cherchera pas à calculer cette primitive).

1. Déterminer le sens de variation de G sur $[1\,;\,2]$.
2. Donner une interprétation géométrique du nombre $G(2)$. Dans la suite, on prendra $1,55$ comme valeur approchée de $G(2)$ à 10^{-2} près.
3. On considère l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^2 G(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Justifier que l'intégrale I calculée dans la première partie peut s'écrire $I = \int_1^2 xg(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) En utilisant une intégration par parties, établir que $I = 2G(2) - J$ et en déduire une valeur approchée de J, à 10^{-2} près.

EXERCICE 39. Problème bac C sportifs de haut niveau octobre 1998.
EXERCICE 40. pondichery avril 1998

VI Calculer l'aire entre deux courbes.

EXERCICE 41. Soient $f : x \mapsto x^2 - \frac{3}{x}$ et $g : x \mapsto x^2$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculez l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$.
EXERCICE 42. Soient $f : x \mapsto 3x^2 - 7x + 2$ et $g : x \mapsto x^2 - 5x + 6$ définies sur $\mathbb{R}$. Calculez l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
EXERCICE 43. Soit $f : x \mapsto x - 3 + \mathrm{e}^{-2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Montrez que $\mathscr{D} :\ y = x - 3$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
2. Étudiez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.
3. Déduisez-en l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \ln(2)$.

EXERCICE 44.