12 Calcul intégral.

I L'intégrale.

Comme (presque) toujours en mathématiques les théorie prennent naissance dans la géométrie. Le calcul intégral est l'aboutissement (en lien avec les fonctions) des problèmes de mesure d'aire.

Les mesures d'aires étaient appelés problèmes de quadratures. Dans le monde sans unité internationale de l'antiquité grecque, tout est question de rapport, de comparaison. Mesurer une aire c'est être capable de se ramener à des figures de même aire mais plus simples (carré, rectangle). Nous ne faisons pas autre chose en utilisant des cm^2 : nous comparons les aires à des petits carrés de 1 cm de côté. De plus ces petits carrés sont partout grâce au quadrillage induit par un repère orthonormé.

On peut imaginer un cheminement assez naturel. L'aire d'un rectangle est obtenue en le recouvrant de petits carrés son aire est alors le nombre de petits carrés. Ce dénombrement est simple : nombre de carrés unités sur la largeur multiplié par le nombre de carrés sur la longueur. L'aire d'un triangle est la moitié de l'aire d'un rectangle. L'aire d'un triangle quelconque est l'aire de deux triangles rectangles. L'aire d'un trapèze est l'aire de deux triangles et d'un rectangle. L'aire des lunules d'Hippocrate donnèrent aux Grecs bon espoir de pouvoir poursuivre cette démarche dans des cas de figures « arrondies » comme le cercle ou la parabole. Mais le problème de la quadrature du cercle resta si longtemps irrésolu que l'expression passa dans le langage courant pour désigner un problème insoluble. Ce problème est en réalité résolu : il est impossible de recouvrir un cercle avec les procédés usuels des Grecs.

Cependant il est un Grec, Archimède, qui trouva une parade. Recouvrir les figures par des figures dont on sait calculer l'aire certes, mais en nombre infini.

Un célèbre palimpseste semble indiquer qu'Archimède alla encore plus loin : il recouvrit la surface sous une parabole par une infinité de figures dont l'aire devenait infiniment petite. Il avait inventer le calcul intégral. Cette découverte fut oubliée pendant deux mille ans jusqu'à ce que Leibnitz et Newton inventent une procédé similaire au $XVII^{\text{e}}$ siècle.

Voyons l'idée d'Archimède.

On voit alors apparaître un encadrement de l'aire recherchée :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \leqslant \mathscr{A} \leqslant \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

Bien sûr plus n est grand, plus l'encadrement se ressert et se rapproche de l'aire sous la courbe : idéalement lorsque n devient infiniment grand nous devrions obtenir exactement l'aire sous la parabole.

Dans le cas de la parabole on a donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n} \leqslant \mathscr{A} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}.$$

Donc :

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \leqslant \mathscr{A} \leqslant \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

D'où :

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \leqslant \mathscr{A} \leqslant \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

En passant à la limite, et d'après le théorème des gendarmes : $\mathscr{A} = \frac{1}{3}$.

Ce procédé est le fondement théorique de ce calcul d'aire appelé intégrale de Riemann.

Définition 1. Soient a et b des réels $a < b$, f une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

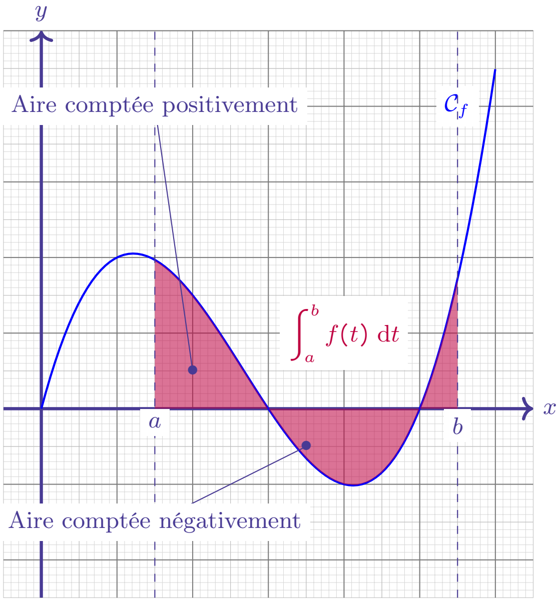
L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et deux droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, et notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelée *intégrale de f sur $[a;b]$*.

Remarques.

1. La notation est en fait un calque de la formule qui permet avant passage à la limite de calculer l'intégrale : $\sum_{k=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$.

Discret.	Continu.	Interprétation.
n	t	
$\frac{1}{n}$	$\mathrm{d}t$	Largeur d'un rectangle.
$f\left(\frac{k}{n}\right)$	$f(t)$	Longueur d'un rectangle.
Σ	$\int$	Somme.
$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$	$\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$	Somme des aires des rectangles.

2. Géométriquement, visuellement, voyons ce que cela donne.



Pour décrire en français la région du plan colorée ci-dessus nous dirons que c'est la surface comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.

3. La notation $\mathrm{d}t$ dans la pratique permet simplement d'identifier la variable. Quelle est la variable dans l'expression $a(r-\alpha)^2 + \beta$?
4. $\mathrm{d}t$ qui est un infiniment petit correspond à la construction qui permet de définir l'intégrale (comme somme d'aires de rectangles de largeur $\mathrm{d}t$). Il est également présent

dans les calculs de dérivés pour le taux d'accroissement entre infiniment petits

$$f'(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$$

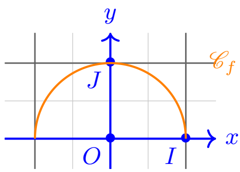
5. Nous pouvons définir une nouvelle fonction en considérant b comme une variable

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

   Nous verrons plus loin que cette fonction est une primitive de f.
6. Le procéder de somme discrète avec passage à la limite ne fonctionne pas toujours. Il faut des fonctions suffisamment régulière (continue par exemple) pour pouvoir l'utiliser. Nous dirons qu'une fonction est *intégrable* lorsque le calcul d'aire est "possible".

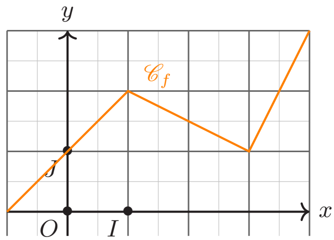
Exemples.

1. Soit f la fonction dont la courbe représentatives est un demi-cercle au-dessus de l'axe des abscisses comme dessiné ci-dessous.



   Calculons $\int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t$.

EXERCICE 1. On considère une fonction f dont la courbe représentative est dessinée ci-dessous.



Déterminez

a) $I_1 = \int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t$.

b) $I_2 = \int_{1}^{2} f(t)\ \mathrm{d}t$.

c) $I_3 = \int_{2}^{3} f(t)\ \mathrm{d}t$.

d) $I_4 = \int_{-1}^{3} f(t)\ \mathrm{d}t$.

EXERCICE 2. m, a et b sont des réels avec $m > 0$ et $a < b$.

a) $\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_2^3 m\ \mathrm{d}t$. b) $\mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_a^b m\ \mathrm{d}t$. c) $\mathscr{A}_3 = \displaystyle\int_1^2 t\ \mathrm{d}t$.

d) $\mathscr{A}_4 = \displaystyle\int_{-1}^{1} -x+1\ \mathrm{d}x$. e) $\mathscr{A}_5 = \displaystyle\int_2^2 4x\ \mathrm{d}x$. f) $\mathscr{A}_6 = \displaystyle\int_{-100}^{100} 0\ \mathrm{d}x$.

EXERCICE 3. Soit f la fonction affine par morceaux définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, \text{ si } x \leqslant 2 \\ -2x + 6 \text{ sinon.} \end{cases}$

Au moyen de considérations géométriques élémentaires, calculez l'aire $\mathscr{A} = \int_0^3 f(t)\ \mathrm{d}t$ de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

Exercice 3.

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^2 \frac{1}{2}x+1\,\mathrm{d}x + \int_2^4 -2x+6\,\mathrm{d}x\\ &= 3+0\\ &= 3\end{aligned}$$

II Théorèmes fondamentaux de l'analyse.

Exemples.

1. Soit $f : x \mapsto 3x$. Exprimez, en fonction de $t \in [0, +\infty[$, l'aire de la surface limitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$.

Théorème 1.Soient $a < b$ des réels, f une fonction continue et positive sur $[a; b]$. Si F est la fonction définie sur $[a; b]$ par

$$\forall x \in [a; b],\ F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

alors

$$\forall x \in [a; b],\ F'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad F(a) = 0.$$

Démonstration Cette démonstration peut être passée en première lecture puisqu'elle nécessite la connaissance de propriétés de l'intégrale qui seront vues ultérieurement.

Soit $x_0 \in [a; b]$.

Démontrons que le nombre dérivé de F en x_0 est $f(x_0)$ en supposant f croissante.

Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in [a; b]$.

$$\begin{aligned}&\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\\ &= \frac{1}{h}\left[F(x_0+h)-F(x_0)\right] - f(x_0)\\ &= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right] - \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t\right] - \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)-f(x_0)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Supposons, par exemple, $h > 0$.
Pour tout $t \in [x_0; x_0+h]$, f étant croissante :

$$f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0+h).$$

Donc en intégrant sur $[x_0; x_0 + h]$ et puisque l'intégrale est croissante :

$$0 \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0) \, \mathrm{d}t \leqslant h\left[f(x_0 + h) - f(x_0)\right].$$

Puis, comme $h \neq 0$:

$$0 \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0) \, \mathrm{d}t \leqslant f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Or, f étant continue, $f(x_0 + h) - f(x_0) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0) \, \mathrm{d}t \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

$$\boxed{F \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } F'(x_0) = f(x_0).}$$

Remarques.

1. Ainsi la fonction F définie dans ce théorème est la primitive de f qui s'annule en a. Par conséquent la recherche de primitive peut se ramener à un calcul d'intégrale.
2. Nous avons justifié l'existence d'une primitive pour une fonction continue positive (même sans être capable d'en donner une expression calculatoire).

Théorème 2.Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ avec $a < b$ des réels et F une primitive de f sur $[a; b]$.

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Démonstration Découle du précédent théorème en remarquant que $x \mapsto \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a et en sachant que deux primitives diffèrent d'une constante.

Exemples.

1. $\int_1^4 u^2 \, \mathrm{d}u$.
2. $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$.
3. $\int_0^{\pi/2} \cos(t) \, \mathrm{d}t$.
4. $\int_0^{1,2} 2z\mathrm{e}^{z^2} \, \mathrm{d}z$.

Remarques.

1. Ce théorème ramène donc le calcul d'intégrale à des recherches de primitives. Par exemple

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{2t+1} \, \mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2}\ln(t+1)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(1) \\ &= \frac{1}{2}\ln(3)\end{aligned}$$

2. La quantité $F(b) - F(a)$ est souvent notée $[F(t)]_a^b$.

Définition 2. Soient $a < b$ des réels, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue et F une primitive de f sur $[a,b]$. Nous appellerons *intégrale de f sur $[a,b]$* le nombre réel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := F(b) - F(a).$$

EXERCICE 4. Démontrez que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x-3)\mathrm{e}^{-x}$, est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f, définie par $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x}$. Déduisez-en la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (2t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 5. Calculez les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x$.
b) $\displaystyle\int_0^2 -4t^2+1\,\mathrm{d}t$.
c) $\displaystyle\int_{-1}^1 (1+s)^2\,\mathrm{d}s$.
d) $\displaystyle\int_0^{1/2} \mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}y$.
e) $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
f) $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{u+2}\,\mathrm{d}u$.
g) $\displaystyle\int_1^2 \frac{-2}{x^3}\,\mathrm{d}x$.
h) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(y)\,\mathrm{d}y$.
i) $\displaystyle\int_0^2 -2t^3+4t^2-5t\,\mathrm{d}t$.
j) $\displaystyle\int_{10}^{12} \frac{2u}{u^2-8}\,\mathrm{d}u$.
k) $\displaystyle\int_1^2 6x(x^2+4)^3\,\mathrm{d}x$.
l) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} 3\sin\left(3y+\frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}y$.
m) $\displaystyle\int_0^1 -3\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x$.
n) $\displaystyle\int_0^{1/2} \pi\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$.
o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}x$.
p) $\displaystyle\int_{-1}^1 15t^4(t^5+2)^3\,\mathrm{d}t$.
q) $\displaystyle\int_4^{25} \frac{5}{\sqrt{x}}+3x\,\mathrm{d}x$.
r) $\displaystyle\int_{-2}^3 \cos(\pi x)\,\mathrm{d}x$.
s) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$.
t) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{2t+1}}\,\mathrm{d}t$.
u) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}\,\mathrm{d}x$.
v) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^4}{(t^5+3)^3}\,\mathrm{d}t$.
w) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.
x) $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x$.
y) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x$.
z) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5.

a) $3\ln(4)$.
b) $\left[-\frac{4}{3}t^3+t\right]0^2 =$
c) $\left[\frac{1}{3}(1+s)^3\right]_{-1}^1 =$
d) $\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}\right]_0^{1/2} =$
e) $\left[\sqrt{t}\right]_4^9 =$
f) $[\ln(u+2)]_0^5 =$
g) $\left[\frac{1}{x^2}\right]_1^2$.
h) $[-\cos(y)]_{\pi/4}^{\pi/2} =$
i) $\left[-\frac{1}{2}t^4+\frac{4}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2\right]_0^2 =$.
j) $\left[\ln\left(u^2-8\right)\right]_{10}^{12} =$.
k) $\left[\frac{3}{4}(x^2+4)^4\right]_1^2 =$.
l) $\left[-\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\pi/3} =$.
m) $\left[\mathrm{e}^{-3x}\right]_0^1 =$.
n) $[-\cos(\pi x)]_0^{1/2} =$.
o) $\left[\frac{1}{1+y}\right]_0^1 =$.
p) $\left[(t^5+2)\right]_0^1 =$.
q) $\left[10\sqrt{x}+\frac{3}{2}x^2\right]_4^{25} =$.
r) $\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_{-2}^3 =$.
s) $[\ln\circ\sin(x)]_{\pi/3}^{\pi/2} =$.
t) $\left[\sqrt{2t+1}\right]_0^3 =$.
u) $\left[-\ln(\mathrm{e}^{-x})\right]_0^1 =$.
v) $\left[\frac{-10}{(t^5+3)^2}\right]_0^1 =$.
w) $\left[-\frac{1}{1+x}\right]_1^2 =$.
x) $\left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3}\right]_0^1 =$.
y) $\left[-\frac{1}{x^3}\right]_1^2 =$.

$\left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_0^3 =$.

EXERCICE 6.

a) $\displaystyle\int_0^1 -3x+2\ \mathrm{d}x.$ b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x.$ c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\ \mathrm{d}x.$ e) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^2+2x\ \mathrm{d}x.$ f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-2x}\ \mathrm{d}x.$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3x+2}\ \mathrm{d}x.$ h) $\displaystyle\int_{-1}^1 t^2+2t-1\ \mathrm{d}x.$ i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{u}{2}\right)\ \mathrm{d}u.$

j) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3y)\ \mathrm{d}y.$ k) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2}{z^3}\ \mathrm{d}z.$ l) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2t)-\sin(t)\ \mathrm{d}t.$

m) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin(3x)-4\cos(x)\ \mathrm{d}x.$ n) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{d}x.$ o) $\displaystyle\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{-2x+1}\ \mathrm{d}x.$

p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{5}{2x-3}\ \mathrm{d}x.$ q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-3}{5}\ \mathrm{d}x.$ r) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\ \mathrm{d}x.$

s) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\mathrm{e}^x}\ \mathrm{d}x.$ t) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x.$

Exercice 6.

a) $\displaystyle\int_0^1 -3x+2\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^3 = \frac{1}{6}.$

c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^{\mathrm{e}} = 1.$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\ \mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

e) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^2+2x\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-2}^1 = \frac{4}{3}+8-4 = \frac{16}{3}.$

f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-2x}\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^2.$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3x+2}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\ln(3x+2)\right]_0^1 = \frac{2}{3}(\ln(5)-\ln(2)).$

h) $\displaystyle\int_{-1}^1 t^2+2t-1\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}t^3+t^2-t\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}-\frac{5}{3} = -\frac{4}{3}.$

i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{u}{2}\right)\ \mathrm{d}u = \left[-2\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}.$

j) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3y)\ \mathrm{d}y = \left[\frac{1}{3}\sin(3y)\right]_0^{\pi} = 0.$

k) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2}{z^3}\ \mathrm{d}z = \left[-\frac{1}{z^2}\right]_{-2}^{-1} = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$

l) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2t)-\sin(t)\ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\sin(2t)+\cos(t)\right]_0^{\pi}.$

m) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin(3x)-4\cos(x)\ \mathrm{d}x.$

n) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{d}x.$

o) $\displaystyle\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{-2x+1}\ \mathrm{d}x.$

p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{5}{2x-3}\ \mathrm{d}x.$

q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-3}{5}\ \mathrm{d}x.$

r) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\ \mathrm{d}x.$

s) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\mathrm{e}^x}\ \mathrm{d}x.$

t) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x.$

EXERCICE 7. Calculez les intégrales.

a) $\displaystyle\int_0^4 t-3\ \mathrm{d}t.$ b) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^2 t^2-4t+3\ \mathrm{d}t.$ c) $\displaystyle\int_1^2 t^2+t-\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t.$

d) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t.$ e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\ \mathrm{d}t.$ f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2t)\ \mathrm{d}t.$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t+2)^3}\ \mathrm{d}t.$ h) $\displaystyle\int_0^1 5t\mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t.$ i) $\displaystyle\int_{\ln(a)}^{\ln(b)} \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t,\ 0<a\leqslant b.$

j) $\displaystyle\int_0^2 5\mathrm{e}^{3t}\ \mathrm{d}t.$ k) $\displaystyle\int_1^9 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$ l) $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}u}{(2u+1)^2}.$

m) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5-x}}.$ n) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)(x^2+x+1)\ \mathrm{d}x.$ o) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{3x+2}.$

p) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{3t-4}\mathrm{d}t.$ q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+3t}}.$ r) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\ \mathrm{d}x.$

s) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{t^3}{t^4+2}\ \mathrm{d}t.$ t) $\displaystyle\int_0^1 (x-2)(x^2-4x+1)^2\ \mathrm{d}x.$ u) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}\ \mathrm{d}x.$

v) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\ \mathrm{d}t.$ w) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(t)}{t}\ \mathrm{d}t.$ x) $\displaystyle\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{1}{t\ln(t)}\ \mathrm{d}t.$

III Intégrales, propriétés.

Par convention (et pour que ce soit cohérent avec la relation de Chasles ci-dessous), si f est continue sur $[a,b]$, nous noterons :

$$\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t := -\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Les propriétés suivantes se conjecturent aisément par des considérations graphiques. Ce sont des propriétés indispensables pour des calculs d'aires. Si les intégrales de Riemann ne les avaient satisfaites nous aurions oublié ce procédé pour un autre.

Proposition 1. Soient $(a,b,c,\lambda)\in\mathbb{R}^4$, f une fonction continue sur $[a,b]$.

Si la surface est réduite à un segment l'aire est nulle : $\int_a^b 0\ \mathrm{d}t = 0$.

Relation de Chasles : $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

Linéarité : $\int_a^b \lambda f(t)+g(t)\ \mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.

Croissance (et donc positivité), pour $a<b$: $f\leqslant g \Rightarrow \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.

D'où : $\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f()|\ \mathrm{d}t$.

Démonstration Ces propriétés se démontrent en utilisant la construction de Riemann des intégrales.

Elles peuvent être démontrées en utilisant l'existence d'une primitive.

Remarques.

1. La croissance de l'intégrale signifie que l'on peut intégrer des inégalités ou des encadrements.

Exemples.

1. Soit $f : x\mapsto \begin{cases} -2x+1 \text{ si } x<0 \\ \mathrm{e}^x \text{ sinon} \end{cases}$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_{-1}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{0} -2t+1\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{t}\ \mathrm{d}t \\ &= [-t^2+t]_{-1}^{0} + [\mathrm{e}^{t}]_{0}^{1} \\ &= -2+\mathrm{e}-1 \\ &= \mathrm{e}-3\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}I &= \int_{1}^{4} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t + \int_{4}^{16} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t + \int_{16}^{6} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{1}^{6} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t \\ &= [\ln(t)]_{1}^{6} \\ &= \ln(6)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}I &= \int_{0}^{1} (\mathrm{e}^{x}+1)^2\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{1} (\mathrm{e}^{x})^2 + 2\mathrm{e}^{x} + 1\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x + 2\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{x}\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 1\ \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_{0}^{1} + 2[\mathrm{e}^{x}]_{0}^{1} + [x]_{0}^{1} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2} - \frac{1}{2} + 2\mathrm{e} - 2 + 1 \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2} + 2\mathrm{e} - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

4. Puisque $\frac{1}{x^2+1} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\ \mathrm{d}t > 0$ mais $\int_1^0 \frac{1}{t^2+1}\ \mathrm{d}t < 0$.
5. Par convexité $\mathrm{e}^{x} \geqslant x$ donc $\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{x}\ \mathrm{d}x \geqslant \int_{-1}^{1} x\ \mathrm{d}x$.
6.

EXERCICE 8. Écrivez chaque expression à l'aide d'une seule intégrale.

a) $\displaystyle\int_{-4}^{6} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{-5}^{-4} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{6}^{10} f(x)\ \mathrm{d}x.$ b) $\displaystyle\int_{10}^{14} g(t)\ \mathrm{d}t - \int_{5}^{0} g(t)\ \mathrm{d}t + \int_{5}^{10} g(t)\ \mathrm{d}t.$

c) $\displaystyle 3\int_{1}^{2} g(x)\ \mathrm{d}x + 5\int_{1}^{2} g(x)\ \mathrm{d}x.$ d) $\displaystyle -4\int_{3}^{5} f(x)\ \mathrm{d}x - 5\int_{5}^{3} g(x)\ \mathrm{d}x.$

EXERCICE 9. Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2+x}{x+1}$.

1. Démontrez : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ f(x) = 2x-1+\frac{1}{x+1}$.
2. Calculez $I = \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$.
3. Déterminez une valeur approchée de I.

EXERCICE 10. On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x+6}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

1. Démontrez que : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3}$.
2. Calculez $I = \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x$.

EXERCICE 11. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Montrez que : $\forall x \in [1;3],\ \frac{1}{10} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
2. Déduisez-en que $\frac{1}{5} \leqslant \int_1^3 f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant 1$.

EXERCICE 12. f est la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Montrez que : $\forall x \in [0;15],\ 1 \leqslant f(x) \leqslant 4$.
2. Déduisez-en un encadrement de $\int_0^{15} f(x)\ \mathrm{d}x$.

EXERCICE 13.

1. Montrez que : $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.
2. Déduisez-en que : $\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.

EXERCICE 14. Montrez que : $0 \leqslant \int_0^1 x\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e} - 1$.

Exercice 14.

$0 \leqslant x \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant x\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^x$ puis en intégrant sur $[0;1]$: $0 \leqslant \int_0^1 x\mathrm{e}^x \leqslant [\mathrm{e}^x]_0^1$.

EXERCICE 15. On souhaite calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\ \mathrm{d}t$. Posons $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1}\ \mathrm{d}t$.

Calculez J, puis $I + J$ et déduisez-en I.

EXERCICE 16. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\ \mathrm{d}t$.

Montrez que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

IV Valeur moyenne d'une fonction.

Proposition 2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction continue sur $[a,b]$, m et M des réels.

Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a,b]$ alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$.

Exemples.

1. Étude de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ sur $[-1;1]$. Puis encadrement de $\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$.

EXERCICE 17. Démontrez que $-2 \leqslant \int_1^3 \sin(x^2)\ \mathrm{d}x \leqslant 2$.

EXERCICE 18. Soit f la fonction définie sur $[-1;0]$ par $f(x) = \frac{3x+4}{(x+2)^2}$.

1. Dressez le tableau de variation de f.
2. Déduisez-en un encadrement de $f(x)$ sur $[-1;0]$.
3. Montrez que $1 \leqslant \int_{-1}^0 f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{9}{8}$.

Exercice 18.

1. $f'(x) = \frac{3(x+2)^2-(3x+4)2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{(x+2)[3x+6-6x-8]}{(x+2)^4} = \frac{(x+2)(-3x-2)}{(x+2)^4}$.

x	-2		$-\frac{2}{3}$		0
f'		$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$	$f\left(-\frac{2}{3}\right)$	$\searrow$	1

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = 1{,}125 = \frac{9}{8}$.

2. $1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{9}{8}$ pour tout $x \in [-1; 0]$.
3. En intégrant le précédent encadrement.

EXERCICE 19. On considère la suite, définie pour tout entier $n \geqslant 3$ par : $u_n = \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, \mathrm{d}t$.

1. Étudiez la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.
2. Déduisez-en un encadrement de u_n pour chaque $n \geqslant 3$.
3. Concluez quant à la convergence de $(u_n)_{n \geqslant 3}$.

Exercice 19.

1. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln(x) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$

x	0		e		$+\infty$
f'	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

2. Pour $n \geqslant 3 \geqslant \mathrm{e}$: $\frac{\ln(n)}{n} \geqslant f(t) \geqslant \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ pour tout $t \in [n, n+1]$.
3. $\frac{\ln(n)}{n} \geqslant u_n \geqslant \frac{\ln(n+1)}{n+1}$.
4. (u_n) converge vers 0.

EXERCICE 20.

1. En considérant la fonction inverse justifiez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$.
2. Déduisez-en que, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} \leqslant \ln(n+1) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.
3. Déduisez en la convergence ou la divergence de $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$. *Cette suite de somme est appelée la série harmonique.*
4. Proposez un algorithme en Python qui donne un encadrement de $\ln(n)$ pour n un entier naturel non nul.

Exercice 20.

1. $\forall x \in [n, n+1]$, $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1}$ puis inégalités de la moyenne.
2. En sommant les inégalités.
3. Diverge vers $+\infty$ par comparaison.
4.

Proposition 3. Si $|f(x)| \leqslant M$ alors $\left|\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t\right| \leqslant M(b-a)$.

Définition 3. Soient : a et b des réels avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$. Nous appellerons *valeur moyenne de f sur $[a,b]$* le réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$.

Remarques.

1. Autrement dit μ est la réponse à la question : quelle serait la hauteur d'un rectangle dont un côté a une longueur de $b-a$ et dont l'aire égale celle $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$?

EXERCICE 21. Lors d'une épidémie de grippe, le nombre de malades, t jours après l'apparition des premiers cas, est modélisé par la fonction f définie sur $[0; 6]$ par $f(t) = 6t^2 - t^3$.

1. Calculez la valeur moyenne μ de la fonction f sur l'intervalle $[0; 6]$.
2. Donnez une interprétation de ce résultat.

EXERCICE 22. Un mobile est étudié sur l'intervalle de temps $[0; 20]$. le temps est exprimé en secondes. La vitesse du mobile en $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, est donné par : $v(t) = 2t^2 + 3t$.

1. Calculez la valeur moyenne de la fonction v sur $[0;20]$.
2. Que représente cette valeur moyenne ?

EXERCICE 23. Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la progression.

On note $f(t)$ la concentration dans le sang (en mg/L) en fonction du temps (en heures) d'un antibiotique administré en une seule dose à un animal, t appartenant à l'intervalle $[0;24]$.

On admet que pour t dans cet intervalle $f(t) = \frac{50t}{t^2+4}$.

Calculez la concentration moyenne de l'antibiotique pendant les 10 premières heures. Donnez la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.

Exercice 23.

$\int_0^{10} \frac{50t}{t^2+4}\, dt = 50 \times \frac{1}{2} \times \left[\ln\left(t^2+4\right)\right]_0^{10} = 25 \times \left(\ln(10^2+4) - \ln(4)\right) \approx 81{,}45241345.$

EXERCICE 24. Soit $I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\, dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n : x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-x}$.

1. Conjecturez le sens de variation de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis démontrez-le.
2. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ et déduisez-en la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

EXERCICE 25.

1. Démontrez que pour tout $x \in [0;1]$: $0 \leqslant x\mathrm{e}^{-x} \leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}$.
2. Déduisez-en que $0 \leqslant \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\, dx \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

EXERCICE 26. Pour n un entier naturel non nul on pose : $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n\, dx$ et $J_n = \int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} (\ln(x))^n\, dx$.

1. Justifiez que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
2. Quel est le sens de variation de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

EXERCICE 27. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int 0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$.

1. Calculez u_0.
2. (a) Démontrez que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.
   (b) Déduisez-en la valeur de u_1.
3. Démontrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

EXERCICE 28. Soient $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\, dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\, dx$.

1. (a) Justifiez que pour tout $x \in [0;1]$: $\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.
   (b) Montrez que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1.
2. (a) Montrez que, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (b) Déduisez-en la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. (a) Calculez pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + J_n$.
   (b) Déterminez la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 29.

V Intégration par parties.

Nous connaissons une formule pour calculer la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$. Nous allons utiliser cette formule pour calculer certaines intégrale qui restaient pour l'heure rétive au calcul.

Théorème 3.Formule d'intégration par parties.

Soient a et b des réels avec $a \leqslant b$, u et v des fonctions dérivables sur $[a,b]$ dont les dérivées sont continues.

Pour tout a et b de I : $\int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t$.

Démonstration En intégrant : $uv' = (uv)' - u'v$.

Exemples.

1. Calculons $\int_1^2 (x-1)\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$.
2. Calculez $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\ \mathrm{d}x$.
3. Déterminez une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

EXERCICE 30. À l'aide d'une intégration par parties calculez les intégrales suivantes.

a) $\int_0^{\pi} t\sin(t)\ \mathrm{d}t$. b) $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$. c) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-2x}\ \mathrm{d}x$.

EXERCICE 31. En procédant à deux intégrations par parties calculez $I = \int_0^{\pi} x^2\sin(x)\ \mathrm{d}x$.

EXERCICE 32. Calculez $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\sin(x)\ \mathrm{d}x$.

EXERCICE 33. Une entreprise produit x centaines d'objets chaque semaine. Le coût de production exprimé en milliers d'euros, est défini sur l'intervalle $[0;5]$ par la fonction C telle que : $C(x) = (4x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. En utilisant une intégration par parties, calculez la valeur moyenne de la fonction C sur l'intervalle $[0;5]$. Vous arrondirez le résultat à 10^{-3} près.
2. Quelle interprétation peut-on faire du résultat précédent pour l'entreprise ?

EXERCICE 34. Calculez $I = \int_0^1 (2t-1)\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$, $J = \int_0^{\mathrm{e}} t^2(1-2\ln(t))\ \mathrm{d}t$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{6}}(2t-1)\sin(t)\ \mathrm{d}t$.

EXERCICE 35. Notons $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(2t-3)\cos^2(t)\ \mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(2t-3)\sin^2(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Calculez $I+J$.
2. Calculez $I-J$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Déduisez-en les valeurs de I et J.

EXERCICE 36. Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers strictement positifs.

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\ \mathrm{d}x$.

1. (a) Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1\,;\mathrm{e}[$, et pour tout n entier naturel, on a : $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$.
   (b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
2. (a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.
   (c) En déduire I_2, I_3 et I_4. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e, et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.
3. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geqslant 0$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n \leqslant \mathrm{e}$.
   (c) En déduire la limite de I_n.
   (d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

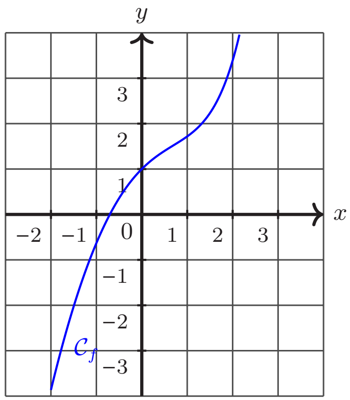
EXERCICE 37. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $x_n = \int_0^1 t^n\cos(t)\ \mathrm{d}t$ et $y_n = \int_0^1 t^n\sin(t)\ \mathrm{d}t$.

1. (a) Justifiez que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.
   (b) Étudiez le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Déduisez-en que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2. (a) Démontrez que pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (b) Déduisez-en la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. (a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.
   (b) Déduisez-en la limite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 38. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x^2$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, est donnée sur le graphique ci-dessous à compléter.



On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - x$ et on note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans le même repère.

Partie A : Remarques préliminaires concernant la fonction f

1. Sans chercher à déterminer son équation, tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par O. On notera A son point de contact avec $\mathcal{C}_f$. Évaluer graphiquement le coefficient directeur de cette tangente en expliquant le procédé utilisé.
2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. En déduire une interprétation graphique du nombre réel : $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - \dfrac{7}{3}$.

Partie B : Étude de la fonction g

1. Étudier les limites de g en $+\infty$ et en 0 et justifier que $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote.
2. (a) Calculer la dérivée $g'(x)$ et montrer qu'elle est du signe de $(x-1)\mathrm{e}^x - x^2$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Soit u la fonction qui à tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ associe $u(x) = (x-1)\mathrm{e}^x - x^2$. Étudier le sens de variation de u sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Déterminer le signe de $u(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1[$.
   (d) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique a sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
   En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $u(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (e) En déduire le signe de $g'(x)$ et dresser la tableau de variation de g.

Partie C : Construction de $\mathcal{C}_g$

1. On se propose de construire le point $S(a\ ;\ g(a))$ où a est le réel déterminé dans la question B. 2. d.

(a) Montrer que, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = 0$ équivaut à $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ et que par conséquent $f'(a) = \dfrac{f(a)}{a}$.

(b) En utilisant ce résultat, établir que a est l'abscisse du point A défini dans la première partie.

(c) Justifier que l'ordonnée de S est $f'(a)$ et placer S sur le dessin.

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
3. Construire la courbe $\mathcal{C}_g$.

Partie D : Étude d'une primitive de g et calcul d'une intégrale

Soit G la primitive de g sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ qui s'annule pour $x = 1$ (on ne cherchera pas à calculer cette primitive).

1. Déterminer le sens de variation de G sur $[1\,;\,2]$.
2. Donner une interprétation géométrique du nombre $G(2)$. Dans la suite, on prendra 1,55 comme valeur approchée de $G(2)$ à 10^{-2} près.
3. On considère l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^2 G(x)\,\mathrm{d}x$.

   (a) Justifier que l'intégrale I calculée dans la première partie peut s'écrire $I = \int_1^2 xg(x)\,\mathrm{d}x$.

   (b) En utilisant une intégration par parties, établir que $I = 2G(2) - J$ et en déduire une valeur approchée de J, à 10^{-2} près.

EXERCICE 39. Problème bac C sportifs de haut niveau octobre 1998.

EXERCICE 40. pondichery avril 1998

EXERCICE 41. On se propose de calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \dfrac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculez les deux intégrales : $A = \int_0^1 \dfrac{x\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ et $B = \int_0^1 \dfrac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x$.
2. Déterminez trois nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel t positif ou nul on ait : $\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{b}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$ (1).
3. En posant $t = \mathrm{e}^x$ dans l'égalité (1), calculez l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x$.
4. (a) À l'aide d'une intégration par parties exprimez J en fonction de I.

   (b) Déduisez-en la valeur de I. À l'aide de la calculatrice donnez une valeur approchée de J à 10^{-2} près.

VI Calculer l'aire entre deux courbes.

Dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ le calcul de l'aire se fait en unités d'aires : $||\vec{i}|| \times ||\vec{j}||$.

Proposition 4. Soit $\mathscr{A}$ l'aire délimitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Si f est positive sur $[a{,}b]$ alors $\mathscr{A} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si f est négative sur $[a{,}b]$ alors $\mathscr{A} = \int_a^b -f(t)\,\mathrm{d}t$.

Sinon $\mathscr{A} = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Exemples.

1. Aire sous la parabole sur $[0;1]$.
2. Aire, $f(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$ sur $[0;2]$.

Proposition 5. Soit $\mathscr{A}$ l'aire délimitée par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Si $f \leqslant g$ alors $\mathscr{A} = \int_a^b g(t) - f(t)\ \mathrm{d}t$.

Exemples.

1. Aire $f(x) = 2x^2 + x + 1$ et $g(x) = x^2 + 6x + 7$ sur $[-2; 0]$.

Remarques.

1. Si f change de signe, dans la pratique, pour calculer l'aire délimitée par l'axe des abscisses la courbe représentative et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ on utilise la relation en intégrant sur les intervalles où f ne change pas de signe.

EXERCICE 42. Soient $f : x \mapsto x^2 - \frac{3}{x}$ et $g : x \mapsto x^2$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculez l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$.

EXERCICE 43. Soient $f : x \mapsto 3x^2 - 7x + 2$ et $g : x \mapsto x^2 - 5x + 6$ définies sur $\mathbb{R}$. Calculez l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

Exercice 43.

$f(x) - g(x) = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x + 1)(x - 2)$. $f - g \leqslant 0$ sur $[1; 2]$ et $f - g \geqslant 0$ sur $[2; 3]$ donc $\mathscr{A} = -\int_1^2 f(x) - g(x)\ \mathrm{d}x + \int_2^3 f(x) - g(x)\ \mathrm{d}x$.

EXERCICE 44. Soit $f : x \mapsto x - 3 + \mathrm{e}^{-2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Montrez que $\mathscr{D} :\ y = x - 3$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
2. Étudiez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.
3. Déduisez-en l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \ln(2)$.

EXERCICE 45.

EXERCICE 46. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier $n \geqslant 0$ par $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1 - x)^n \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$.

1. (a) Calculez $\int_0^1 (1 - x)^n\ \mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) À l'aide de l'encadrement $1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$ valable sur l'intervalle $[0; 1]$, montrez que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a : $\frac{1}{(n+1)!} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$.
   (c) Montrez que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminez sa limite.
2. (a) Calculez I_0, puis I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) Établissez, en intégrant par parties, que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $I_n - I_{n-1} = -\frac{1}{n!}$ (1).
3. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $J_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.
   (a) En utilisant les relations (1) exprimez J_n en fonction de I_n et I_0.
   (b) Déduisez-en la limite J de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Justifiez l'encadrement $\frac{1}{(n+1)!} \leqslant J - J_n \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$.