11 Équations différentielles.

I Primitives.

1 Définition.

Exercice 1.

Déterminez une primitive de la fonction f (sans se préoccuper des domaines de définition).

a) $f(x) = 5(5x-1)^3$.

b) $f(x) = \cos(x)\sin^2(x)$.

c) $f(x) = -e^{-x}\left(e^{-x}+1\right)^4$.

d) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+3}$.

e) $f(x) = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)}$.

f) $f(x) = \dfrac{-10xe^{-5x^2}}{e^{-5x^2}}$

Exercice 2.

Vérifiez que f est solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

a) $f : x \mapsto 5x^2 - 2x - 5$ et $(E) :\ y' = 10x - 2$.

b) $f : x \mapsto 1 - e^{-2x+1}$ et $(E) :\ y' = 2e^{-2x+1}$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ et $(E) :\ y' = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

d) $f : x \mapsto \cos(x)$ et $(E) :\ y' = -\sin(x)$.

Exercice 3.

Déterminez une primitive de la fonction f sur I.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 7$ et $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = x^3 + x - 12$ et $I = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = x^6 + 3x^5 - x^4$ et $I = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = 0,1x^4 + \frac{x^2}{10} - \frac{x}{100}$ et $I = \mathbb{R}$.

e) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$ et $I =]0, +\infty[$.

f) $f(x) = \frac{5}{x^4} - \frac{4}{x^5}$ et $I =]0, +\infty[$.

g) $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2}$ et $I =]0, +\infty[$.

h) $f(x) = \frac{1}{3x^2} - \frac{3x^2}{2} + \frac{2}{3}$.

i) $f(x) = 10(2x+1)^4$ et $I = \mathbb{R}$.

j) $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ et $I = \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

k) $f(x) = \frac{-1}{2(x-2)^3}$ et $I =]2, +\infty[$.

l) $f(x) = \frac{2}{2x-6}$ et $I =]3, +\infty[$.

m) $f(x) = -\sin(-x)$ et $I = \mathbb{R}$.

n) $f(x) = 2\cos(2x+1)$ et $I = \mathbb{R}$.

o) $f(x) = -3\sin(x)\cos^2(x)$ et $I = \mathbb{R}$.

p) $f(x) = 3\mathrm{e}^{3x+1}$ et $I = \mathbb{R}$.

q) $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$ et $I = \mathbb{R}$.

r) $f(x) = 6\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x + 2\right)^5$ et $I = \mathbb{R}$.

s) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}$ et $I = \mathbb{R}$.

2 Existence et non unicité.

Exercice 4.

On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(-x^2 + 2x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}$ et $F(x) = (x^2 - 1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Vérifiez que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déduisez-en la primitive G de f telle que $G(0) = 5$.

Exercice 5.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \frac{1}{x} - \mathrm{e}^x$.

1. Donnez une primitive de f sur $]0, +\infty[$.
2. Déduisez en toutes les primitives de f sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminez la primitive F de la fonction f telle que $F(1) = 0$.

Exercice 6.

Déterminez la primitive F de f sur I qui vérifie la condition initiale donnée.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2$, $I = \mathbb{R}$, $F(0) = 2$.

b) $f(x) = \cos(x)$, $I = \mathbb{R}$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2$, $I =]0, +\infty[$, $F(1) = 1$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, $I =]0, +\infty[$, $F(1) = 2$.

e) $f(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$, $I = \mathbb{R}$, $F(0) = 0$.

Exercice 7.

Déterminez l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \dfrac{6x+3}{x^2+x+1}$.

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$.

c) $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$.

d) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.

Exercice 8.

Justifiez dans chaque cas que la fonction f admet des primitives sur l'intervalle I et déterminez une primitive de f sur I.

a) $f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{5x}{4}}$ et $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} \exp\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ et $I =]1, +\infty[$.

c) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + x}{\left(\mathrm{e}^{2x} + x^2\right)^4}$ et $I = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\sqrt{\mathrm{e}^x + x}}$ et $I = [0, +\infty[$.

Exercice 9.

Déterminez la primitive F de f sur I qui vérifie la condition initiale donnée.

a) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $I =]0, +\infty[$ et $F(1) = 1$.

b) $f(x) = 3\sin(2x)$, $I = \mathbb{R}$ et $F(0) = 2$.

c) $f(x) = \frac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}$, $I = \mathbb{R}$ et $F(0) = 0$.

Exercice 10.

On considère les fonctions F et G définies sur $]0,+\infty[$ par : $F(x) = 1 - x + x\ln(x)$ et $G(x) = x(\ln(x) - 1)$.
Démontrez que F et G sont des primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 Exercices.

Exercice 11.

On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$par $f(x) = \frac{x+2}{x(x-1)^2}$.

1. Déterminez trois nombres réels a, b et c tels que : $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$.
2. Déduisez-en une primitive F de f sur $]1,+\infty[$ telle que $F(2) = 10$.

Exercice 12.

Déterminez toutes les primitives sur $]-1,+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$.

Exercice 13.

Déterminez toutes les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}$.

Exercice 14.

1. Soient a et b deux nombres réels.
   Dérivez la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \mathrm{e}^x(a\cos(x) + b\sin(x))$.
2. Déduisez-en toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x\cos(x)$ et $g(x) = \mathrm{e}^x\sin(x)$.

II Équations différentielles linéaires d'ordre un à coefficients constants.

1 Vocabulaire.

Exercice 15.

Parmi les fonctions $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{4-x}$, $f_2 : x \mapsto -\mathrm{e}^{4x}$, $f_3 : x \mapsto \mathrm{e}^{4-\frac{1}{4}x}$ et $f_4 : x \mapsto 4\mathrm{e}^{\frac{1}{4}x}$, déterminez les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles proposées.

a) $y' = -y$.

b) $4y' = y$.

c) $y' - 4y = 0$.

d) $4y' + y = 0$.

2 L'équation homogène.

Exercice 16.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a) $y' = 3y$.

b) $y' + 2y = 0$.

c) $2y' = y$.

d) $3y' - 5y = 0$.

Exercice 17.

a) Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' = 2020y$.

b) Déterminez la solution f de l'équation (E) telle que $f(0) = 2$.

Exercice 18.

Résolvez les équations différentielles avec condition initiale.

a) $y' = \frac{1}{2}y$ et $f(0) = 1$.

b) $5y' = y$ et $f(1) = 0$.

c) $y' + y = 0$ et $f'(1) = 2$.

Exercice 19.

Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone. Tant qu'il est en vie, l'organisme d'un être vivant contient la même proportion de carbone 14. À sa mort la quantité de cet élément radioactif décroît.
On note $N(t)$ le nombre de noyaux de carbone 14 que contient un organisme t années après sa mort.
On admet que la fonction N est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,000121y$.

a) Résolvez l'équation différentielle (E) en prenant comme condition initiale $N(0) = N_0$ où $N_0 \in \mathbb{N}$.

b) On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps au bout duquel le nombre de noyaux à diminué de moitié. Calculez la demi-vie du carbone 14.

3 L'équation avec second membre constant.

Exercice 20.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -\frac{1}{2}y + 3$.

1. Donnez la seule solution constante sur $\mathbb{R}$ de (E).
2. Déduisez-en toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21.

Résolvez sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a) $y' = -2y + 5$.

b) $y' = y - 3$.

c) $2y' + y = 4$.

d) $3y' - 6y = 1$.

Exercice 22.

Déterminez la solution de l'équation différentielle vérifiant la condition.

a) $y' = 3y - 6$ et $y(0) = -1$.

b) $y' = -5y + 4$ et $y(1) = 0$.

c) $y' = y - 1$ et $y(2) = 1$.

Exercice 23.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 0,8y + 1,6$.

1. Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).
2. Vérifiez que toutes les solutions de (E) admettent une asymptote que vous préciserez.

4 Équation différentielle avec second membre quelconque.

Exercice 24.

Vérifiez que f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-5x+1} + \frac{3}{5}$ et (E) : $y' = -5y + 3$.

b) $f(x) = 2x + 2$ et (E) : $y' = -2y + 4x + 6$.

c) $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-2x}$ et (E) : $y' = -2y + \mathrm{e}^{-2x}$.

Exercice 25.

Soit (E) : $y' = 2y + 2x$ une équation différentielle.

1. Vérifiez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x - \frac{1}{2}$ est une solution particulière de l'équation (E).
2. Déduisez-en toutes les solutions de (E).

Exercice 26.

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$ et l'équation différentielle $(E) :\ y' = y + e^x$.

1. Vérifiez que la fonction f est une solution particulière de (E).
2. Déduisez-en la seule solution g de (E) telle que $g(0) = 5$.

Exercice 27.

On considère l'équation différentielle $(E) :\ y' + y = x^2 + x$

1. Trouvez les valeurs de a, b et c tels que la fonction g, définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E).
2. Déduisez-en les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28.

On peut modéliser le taux d'alcool, en fonction du temps exprimé en heures, par une fonction f définie sur $[0,005, +\infty[$.
On admet que f est solution de l'équation différentielle $(E) :\ y' = -y + ke^{-t}$ et $f(0,005) = 0$ où k est une constante positive dépendant de la quantité d'alcool absorbée et de la corpulence de l'individu.

1. (a) Exprimez, en fonction de k, le nombre réel a tel que la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = ate^{-t}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
   (b) Déduisez-en l'expression de $f(t)$ en fonction de k.
2. Étudiez le sens de variation de f et vérifiez qu'il ne dépend pas de k.
3. Trois heures après avoir consommé de l'alcool l'alcoolémie d'un individu est de $0,8\ \mathrm{g} \cdot \ell$. Le taux maximum autorisé étant de $0,2\ \mathrm{g} \cdot \ell$, combien de temps devra-t-il attendre avant de reprendre le volant ?

5 Exercices.

Exercice 29.

Exercice 30.