11 Équations différentielles.

I Primitives.

1 Définition.

Exercice 1.

Déterminez une primitive de la fonction f (sans se préoccuper des domaines de définition).

a) $f(x) = 5(5x-1)^3$.

b) $f(x) = \cos(x)\sin^2(x)$.

c) $f(x) = -\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)^4$.

d) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+3}$.

e) $f(x) = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)}$.

f) $f(x) = \dfrac{-10x\mathrm{e}^{-5x^2}}{\mathrm{e}^{-5x^2}}$

Correction de l'exercice 1

a) $\frac{1}{4}(5x-1)^4$.

b) $\frac{1}{3}\sin^3(x)$.

c) $\frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)^5$.

d) $\ln\left|x^2+2x+3\right|$.

e) $\ln(\cos(x))$.

f) $\ln\left(\mathrm{e}^{-5x^2}\right)$.

Exercice 2.

Vérifiez que f est solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

a) $f : x \mapsto 5x^2 - 2x - 5$ et $(E) :\ y' = 10x - 2$.

b) $f : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-2x+1}$ et $(E) :\ y' = 2\mathrm{e}^{-2x+1}$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ et $(E) :\ y' = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

d) $f : x \mapsto \cos(x)$ et $(E) :\ y' = -\sin(x)$.

Exercice 3.

Déterminez une primitive de la fonction f sur I.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 7$ et $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = x^3 + x - 12$ et $I = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = x^6 + 3x^5 - x^4$ et $I = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = 0,1x^4 + \frac{x^2}{10} - \frac{x}{100}$ et $I = \mathbb{R}$.

e) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$ et $I =]0, +\infty[$.

f) $f(x) = \frac{5}{x^4} - \frac{4}{x^5}$ et $I =]0, +\infty[$.

g) $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2}$ et $I =]0, +\infty[$.

h) $f(x) = \frac{1}{3x^2} - \frac{3x^2}{2} + \frac{2}{3}$.

i) $f(x) = 10(2x+1)^4$ et $I = \mathbb{R}$.

j) $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ et $I = \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

k) $f(x) = \frac{-1}{2(x-2)^3}$ et $I =]2, +\infty[$.

l) $f(x) = \frac{2}{2x-6}$ et $I =]3, +\infty[$.

m) $f(x) = -\sin(-x)$ et $I = \mathbb{R}$.

n) $f(x) = 2\cos(2x+1)$ et $I = \mathbb{R}$.

o) $f(x) = -3\sin(x)\cos^2(x)$ et $I = \mathbb{R}$.

p) $f(x) = 3\mathrm{e}^{3x+1}$ et $I = \mathbb{R}$.

q) $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$ et $I = \mathbb{R}$.

r) $f(x) = 6\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x + 2\right)^5$ et $I = \mathbb{R}$.

s) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}$ et $I = \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3

a) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7$.

b) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 12x$.

c) $\frac{1}{7}x^7 + \frac{3}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5$.

d) $\frac{0,1}{5}x^5 + \frac{1}{30}x^3 - \frac{1}{200}x$.

e) $\ln(x) - \frac{1}{2x^2}$.

f) $-\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^4}$.

g) $\frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{4}x^2$.

h) $-\frac{1}{6x} - \frac{x^3}{2}$.

i) $(2x+1)^5$.

j) $\sqrt{3x+1}$.

k) $\frac{1}{(x-2)^2}$.

l) $\ln(2x-6)$.

m) $-\cos(-x)$.

n) $\sin(2x+1)$.

o) $\cos^3(x)$.

p) e^{3x+1}.

q) e^{x^2}.

r) $(\mathrm{e}^x + 2)^6$.

s) $\ln(\mathrm{e}^x + 3)$.

2 Existence et non unicité.

Exercice 4.

On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(-x^2 + 2x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}$ et $F(x) = (x^2 - 1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Vérifiez que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déduisez-en la primitive G de f telle que $G(0) = 5$.

Correction de l'exercice 4

1. $F' = f$.
2. Déterminons la primitive G.

   Puisque F et G sont des primitives de f, il existe un réel c tel que $G = F + c$. Or $G(0) = 5$ donc, successivement

$$\begin{aligned} F(0) + c &= 5 \\ (0^2 - 1)\mathrm{e}^{-0} + c &= 5 \\ -1 + c &= 5 \\ c &= 6 \end{aligned}$$

$$\boxed{G : x \mapsto \left(x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x} + 6.}$$

Exercice 5.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \frac{1}{x} - \mathrm{e}^x$.

1. Donnez une primitive de f sur $]0, +\infty[$.
2. Déduisez en toutes les primitives de f sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminez la primitive F de la fonction f telle que $F(1) = 0$.

Correction de l'exercice 5

1. $H(x) = \ln(x) - \mathrm{e}^x$.
2. Déterminons l'ensemble de toutes les primitives de f sur $]0, +\infty[$.

   Puisque H est une primitive de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$

   les primitives de f sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $H + c$ où c décrit $\mathbb{R}$.

3. $F(1) = 0 \Leftrightarrow H(1) + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$.
   $F : x \mapsto \ln(x) - e^{x} + 1$.

Exercice 6.

Déterminez la primitive F de f sur I qui vérifie la condition initiale donnée.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2$, $I = \mathbb{R}$, $F(0) = 2$.

b) $f(x) = \cos(x)$, $I = \mathbb{R}$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2$, $I =]0, +\infty[$, $F(1) = 1$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, $I =]0, +\infty[$, $F(1) = 2$.

e) $f(x) = e^{2x+1}$, $I = \mathbb{R}$, $F(0) = 0$.

Correction de l'exercice 6

a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2$.

b) $F(x) = \sin(x) - 1$.

c) $F(x)2\sqrt{x} + 2x - 3$.

d) $F(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} + 1$.

e) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} - \frac{e}{2}$.

Exercice 7.

Déterminez l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \dfrac{6x+3}{x^2+x+1}$.

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$.

c) $f(x) = 2xe^{-x^2}$.

d) $f(x) = e^{x^2}$.

Correction de l'exercice 7

a) $F(x) = 3\ln\left(x^2 + x + 1\right) + c$.

b) $F(x) = \frac{2}{6}\sqrt{3x^2+1} + c$.

c) $F(x) = -e^{-x^2} + c$.

d) $F(x) = ?$.

Exercice 8.

Justifiez dans chaque cas que la fonction f admet des primitives sur l'intervalle I et déterminez une primitive de f sur I.

a) $f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{5x}{4}}$ et $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}\exp\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ et $I =]1, +\infty[$.

c) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+x}{\left(\mathrm{e}^{2x}+x^2\right)^4}$ et $I = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}+1}{\sqrt{\mathrm{e}^{x}+x}}$ et $I = [0, +\infty[$.

Correction de l'exercice 8

Les fonctions considérées sont toutes continues.

a) $F(x) = -2\frac{4}{5}\mathrm{e}^{-\frac{5x}{4}}$.

b) $F(x) = -\frac{1}{2}\exp\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

c) $F(x) = \frac{1}{2\times 5}\left(\mathrm{e}^{2x}+x^2\right)^{-5}$.

d) $F(x) = 2\sqrt{\mathrm{e}^{x}+x}$.

Exercice 9.

Déterminez la primitive F de f sur I qui vérifie la condition initiale donnée.

a) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $I =]0, +\infty[$ et $F(1) = 1$.

b) $f(x) = 3\sin(2x)$, $I = \mathbb{R}$ et $F(0) = 2$.

c) $f(x) = \frac{3\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+3}$, $I = \mathbb{R}$ et $F(0) = 0$.

Correction de l'exercice 9

a) $F(x) = -\frac{1}{4x^4} + 2$.

b) $F(x) = -\frac{3}{2}\cos(2x) + \frac{7}{2}$.

c) $F(x) = 3\ln(\mathrm{e}^{x}+3) - 3\ln(3)$.

Exercice 10.

On considère les fonctions F et G définies sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = 1 - x + x\ln(x)$ et $G(x) = x\left(\ln(x) - 1\right)$.

Démontrez que F et G sont des primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction de l'exercice 10

On vérifie $F' = G' = \ln$.

3 Exercices.

Exercice 11.

On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$par $f(x)=\frac{x+2}{x(x-1)^2}$.

1. Déterminez trois nombres réels a, b et c tels que : $f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$.
2. Déduisez-en une primitive F de f sur $]1,+\infty[$ telle que $F(2)=10$.

Correction de l'exercice 11

1. Déterminons a, b et c.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a(x-1)^2}{x(x-1)^2}+\frac{bx(x-1)}{x(x-1)^2}+\frac{cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{ax^2-2ax+a+bx^2-bx+cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2+(-2a-b+c)x+a}{x(x-1)^2} \end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ -2a-b+c &= 1 \\ a &= 2 \end{cases}$$

En résolvant le système : $a=2$, $b=-2$ et $c=3$.

$$\boxed{f(x)=\frac{2}{x}+\frac{-2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}.}$$

Exercice 12.

Déterminez toutes les primitives sur $]-1,+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$.

Correction de l'exercice 12

$f(x)=2+\frac{1}{x}$

$F(x)=2x+\ln(x)+c$.

Exercice 13.

Déterminez toutes les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}$.

Correction de l'exercice 13

$f(x)=1+\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$.

$F(x)=x+\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$.

Exercice 14.

1. Soient a et b deux nombres réels.
   Dérivez la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \mathrm{e}^x\left(a\cos(x) + b\sin(x)\right)$.
2. Déduisez-en toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x\cos(x)$ et $g(x) = \mathrm{e}^x\sin(x)$.

Correction de l'exercice 14

1. $h'(x) = \mathrm{e}^x\left((a+b)\cos(x) + (b-a)\sin(x)\right)$.
2. D'après la question précédente avec $a = b = \frac{1}{2}$: $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\left(\cos(x) + \sin(x)\right)$.
   Avec $a = -b = -\frac{1}{2}$: $G(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\left(-\cos(x) + \sin(x)\right)$

II Équations différentielles linéaires d'ordre un à coefficients constants.

1 Vocabulaire.

Exercice 15.

Parmi les fonctions $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{4-x}$, $f_2 : x \mapsto -\mathrm{e}^{4x}$, $f_3 : x \mapsto \mathrm{e}^{4-\frac{1}{4}x}$ et $f_4 : x \mapsto 4\mathrm{e}^{\frac{1}{4}x}$, déterminez les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles proposées.

a) $y' = -y$.

b) $4y' = y$.

c) $y' - 4y = 0$.

d) $4y' + y = 0$.

2 L'équation homogène.

Exercice 16.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a) $y' = 3y$.

b) $y' + 2y = 0$.

c) $2y' = y$.

d) $3y' - 5y = 0$.

Exercice 17.

a) Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' = 2020y$.

b) Déterminez la solution f de l'équation (E) telle que $f(0) = 2$.

Exercice 18.

Résolvez les équations différentielles avec condition initiale.

a) $y' = \frac{1}{2}y$ et $f(0) = 1$.

b) $5y' = y$ et $f(1) = 0$.

c) $y' + y = 0$ et $f'(1) = 2$.

Exercice 19.

Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone. Tant qu'il est en vie, l'organisme d'un être vivant contient la même proportion de carbone 14. À sa mort la quantité de cet élément radioactif décroît.
On note $N(t)$ le nombre de noyaux de carbone 14 que contient un organisme t années après sa mort.
On admet que la fonction N est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,000121y$.

a) Résolvez l'équation différentielle (E) en prenant comme condition initiale $N(0) = N_0$ où $N_0 \in \mathbb{N}$.

b) On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps au bout duquel le nombre de noyaux à diminué de moitié. Calculez la demi-vie du carbone 14.

3 L'équation avec second membre constant.

Exercice 20.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -\frac{1}{2}y + 3$.

1. Donnez la seule solution constante sur $\mathbb{R}$ de (E).
2. Déduisez-en toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21.

Résolvez sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a) $y' = -2y + 5$.

b) $y' = y - 3$.

c) $2y' + y = 4$.

d) $3y' - 6y = 1$.

Exercice 22.

Déterminez la solution de l'équation différentielle vérifiant la condition.

a) $y' = 3y - 6$ et $y(0) = -1$.

b) $y' = -5y + 4$ et $y(1) = 0$.

c) $y' = y - 1$ et $y(2) = 1$.

Exercice 23.

On considère l'équation différentielle $(E): \ y' = 0,8y + 1,6$.

1. Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).
2. Vérifiez que toutes les solutions de (E) admettent une asymptote que vous préciserez.

4 Équation différentielle avec second membre quelconque.

Exercice 24.

Vérifiez que f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-5x+1} + \frac{3}{5}$ et $(E): \ y' = -5y + 3$.

b) $f(x) = 2x + 2$ et $(E): \ y' = -2y + 4x + 6$.

c) $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-2x}$ et $(E): \ y' = -2y + \mathrm{e}^{-2x}$.

Exercice 25.

Soit $(E): \ y' = 2y + 2x$ une équation différentielle.

1. Vérifiez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x - \frac{1}{2}$ est une solution particulière de l'équation (E).
2. Déduisez-en toutes les solutions de (E).

Exercice 26.

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$ et l'équation différentielle $(E): \ y' = y + \mathrm{e}^x$.

1. Vérifiez que la fonction f est une solution particulière de (E).
2. Déduisez-en la seule solution g de (E) telle que $g(0) = 5$.

Correction de l'exercice 26

$f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$ et $f + \mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$ donc f est solution de (E).

(E) est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 1$ et $b(x) = \mathrm{e}^x$. Comme f en est une solution particulière, les solutions sont les fonctions $g_C(x) = C\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$.

Si g est la solution vérifiant $g(0) = 5$ alors $C = 5$ et donc $g(x) = 5\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$.

Exercice 27.

On considère l'équation différentielle $(E): \ y' + y = x^2 + x$

1. Trouvez les valeurs de a, b et c tels que la fonction g, définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E).
2. Déduisez-en les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28.

On peut modéliser le taux d'alcool, en fonction du temps exprimé en heures, par une fonction f définie sur $[0,005, +\infty[$.

On admet que f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -y + ke^{-t}$ et $f(0,005) = 0$ où k est une constante positive dépendant de la quantité d'alcool absorbée et de la corpulence de l'individu.

1. (a) Exprimez, en fonction de k, le nombre réel a tel que la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = ate^{-t}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
   (b) Déduisez-en l'expression de $f(t)$ en fonction de k.
2. Étudiez le sens de variation de f et vérifiez qu'il ne dépend pas de k.
3. Trois heures après avoir consommé de l'alcool l'alcoolémie d'un individu est de $0,8$ g $\cdot$ ℓ. Le taux maximum autorisé étant de $0,2$ g $\cdot$ ℓ, combien de temps devra-t-il attendre avant de reprendre le volant ?

5 Exercices.

Exercice 29.

Exercice 30.