# 11 Équations différentielles.

## I Primitives.

### 1 Définition.

Définition 1

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application.
On dit qu'une application $F$ est *une primitive de $f$* sur $E$ si et seulement si $F$ est dérivable sur $E$ et $F' = f$.

Remarques.

1. On appelle *équation différentielle* une équation (égalité qui peut être vraie ou fausse) dont l'inconnue est une fonction et ses dérivées.
2. Chercher une primitive est la tâche réciproque de la dérivation. Ce sont donc les formules de dérivation que nous connaissons qui vous nous permettre de trouver les primitives.

   ON retrouve notamment la propriété de linéarité de la dérivation : une primitive d'une somme est, par exemple, une somme des primitives.
3. Quel est l'intérêt de ce travail réciproque de la dérivation ? Cela semble pour l'instant gratuit, mais nous verrons bientôt, avec les calculs d'intégrales, une application fondamentale de la recherche des primitives.

Exemples.

1. $x \mapsto \frac{5}{4}x^4$ est une primitive de $x \mapsto 5x^3$.
2. $x \mapsto \mathrm{e}^{3x+1} + 8$ est une primitive de $x \mapsto 3\mathrm{e}^{3x+1}$.
3. $x \mapsto \frac{1}{2}\sin(2x)$ est solution de l'équation différentielle $y' = \cos(2x)$.
4. Une primitive de $x \mapsto \frac{3x^2+2x+4}{x^3+x^2+4x+1}$ est $\ln\left(x^3 + x^2 + 4x + 1\right)$ (là où la fonction est effectivement définie).

## Exercice 1.

Déterminez une primitive de la fonction $f$ (sans se préoccuper des domaines de définition).

a) $f(x) = 5(5x-1)^3$.

b) $f(x) = \cos(x)\sin^2(x)$.

c) $f(x) = -\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)^4$.

d) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+3}$.

e) $f(x) = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)}$.

f) $f(x) = \dfrac{-10x\mathrm{e}^{-5x^2}}{\mathrm{e}^{-5x^2}}$

### Correction de l'exercice 1

a) $\frac{1}{4}(5x-1)^4$.

b) $\frac{1}{3}\sin^3(x)$.

c) $\frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)^5$.

d) $\ln\left|x^2+2x+3\right|$.

e) $\ln(\cos(x))$.

f) $\ln\left(\mathrm{e}^{-5x^2}\right)$.

## Exercice 2.

Vérifiez que $f$ est solution de l'équation différentielle $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

a) $f : x \mapsto 5x^2 - 2x - 5$ et $(E) :\ y' = 10x - 2$.

b) $f : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-2x+1}$ et $(E) :\ y' = 2\mathrm{e}^{-2x+1}$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ et $(E) :\ y' = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

d) $f : x \mapsto \cos(x)$ et $(E) :\ y' = -\sin(x)$.

## Exercice 3.

Déterminez une primitive de la fonction $f$ sur $I$.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 7$ et $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = x^3 + x - 12$ et $I = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = x^6 + 3x^5 - x^4$ et $I = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = 0,1x^4 + \frac{x^2}{10} - \frac{x}{100}$ et $I = \mathbb{R}$.

e) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$ et $I = ]0, +\infty[$.

f) $f(x) = \frac{5}{x^4} - \frac{4}{x^5}$ et $I = ]0, +\infty[$.

g) $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2}$ et $I = ]0, +\infty[$.

h) $f(x) = \frac{1}{3x^2} - \frac{3x^2}{2} + \frac{2}{3}$.

i) $f(x) = 10(2x + 1)^4$ et $I = \mathbb{R}$.

j) $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ et $I = \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

k) $f(x) = \frac{-1}{2(x-2)^3}$ et $I = ]2, +\infty[$.

l) $f(x) = \frac{2}{2x-6}$ et $I = ]3, +\infty[$.

m) $f(x) = -\sin(-x)$ et $I = \mathbb{R}$.

n) $f(x) = 2\cos(2x + 1)$ et $I = \mathbb{R}$.

o) $f(x) = -3\sin(x)\cos^2(x)$ et $I = \mathbb{R}$.

p) $f(x) = 3\mathrm{e}^{3x+1}$ et $I = \mathbb{R}$.

q) $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$ et $I = \mathbb{R}$.

r) $f(x) = 6\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x + 2\right)^5$ et $I = \mathbb{R}$.

s) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}$ et $I = \mathbb{R}$.

## Correction de l'exercice 3

a) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7$.

b) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 12x$.

c) $\frac{1}{7}x^7 + \frac{3}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5$.

d) $\frac{0,1}{5}x^5 + \frac{1}{30}x^3 - \frac{1}{200}x$.

e) $\ln(x) - \frac{1}{2x^2}$.

f) $-\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^4}$.

g) $\frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{4}x^2$.

h) $-\frac{1}{6x} - \frac{x^3}{2}$.

i) $(2x + 1)^5$.

j) $\sqrt{3x + 1}$.

k) $\frac{1}{(x-2)^2}$.

l) $\ln(2x - 6)$.

m) $-\cos(-x)$.

n) $\sin(2x + 1)$.

o) $\cos^3(x)$.

p) $\mathrm{e}^{3x+1}$.

q) $\mathrm{e}^{x^2}$.

r) $(\mathrm{e}^x + 2)^6$.

s) $\ln(\mathrm{e}^x + 3)$.

## 2 Existence et non unicité.

Proposition 1

Toute fonction $f$ continue sur un intervalle non trivial $I$ admet une primitive sur $I$.

Démonstration

Nous verrons une preuve lorsque nous étudierons les intégrales.

■

Proposition 2

Si $F$ et $G$ sont des primitives d'une fonction $f$ continue sur un intervalle $I$ alors $F - G$ est une fonction constante.

Démonstration

$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$. Si $(F-G)' = 0$ sur $I$ alors $F - G$ est constante (résultat vu et utilisé en première qui est une conséquence du théorème des accroissements finis que vous rencontrerez peut-être un jour).

■

Corollaire 1

Soient $a$ et $b$ des réels.

Une fonction $f$, continue sur un intervalle $I$, admet une unique primitive $F$ telle que $F(a) = b$.

Remarques.

1. On dit que les primitives (sur un intervalle) diffèrent d'une constante.
2. Nous utiliserons ce résultat pour décrire l'ensemble des primitives possibles : si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$ alors les autres primitives de $f$ sont les fonctions de la forme $F + \lambda$ où $\lambda$ décrit $\mathbb{R}$.

Exemples.

1. $F : x \mapsto \frac{1}{4}x^4$ est une primitive de $f : x \mapsto x^3$ mais il y a d'autres primitives : $x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + 3$, $x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - 5$, $x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + 12$,
2. $F : x \mapsto -3\mathrm{e}^{-3x}$ est une primitive de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-3x}$.

## Exercice 4.

On considère les fonctions $f$ et $F$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(-x^2 + 2x + 1\right)e^{-x}$ et $F(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$.

1. Vérifiez que $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déduisez-en la primitive $G$ de $f$ telle que $G(0) = 5$.

### Correction de l'exercice 4

1. $F' = f$.
2. Déterminons la primitive $G$.

   Puisque $F$ et $G$ sont des primitives de $f$, il existe un réel $c$ tel que $G = F + c$. Or $G(0) = 5$ donc, successivement

$$\begin{aligned} F(0) + c &= 5 \\ (0^2 - 1)e^{-0} + c &= 5 \\ -1 + c &= 5 \\ c &= 6 \end{aligned}$$

$$\boxed{G : x \mapsto \left(x^2 - 1\right)e^{-x} + 6.}$$

## Exercice 5.

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \frac{1}{x} - e^x$.

1. Donnez une primitive de $f$ sur $]0, +\infty[$.
2. Déduisez en toutes les primitives de $f$ sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminez la primitive $F$ de la fonction $f$ telle que $F(1) = 0$.

### Correction de l'exercice 5

1. $H(x) = \ln(x) - e^x$.
2. Déterminons l'ensemble de toutes les primitives de $f$ sur $]0, +\infty[$.

   Puisque $H$ est une primitive de $f$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$

   > les primitives de $f$ sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $H + c$ où $c$ décrie $\mathbb{R}$.

3. $F(1) = 0 \Leftrightarrow H(1) + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$.
   $F : x \mapsto \ln(x) - e^x + 1$.

### Exercice 6.

Déterminez la primitive $F$ de $f$ sur $I$ qui vérifie la condition initiale donnée.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2$, $I = \mathbb{R}$, $F(0) = 2$.

b) $f(x) = \cos(x)$, $I = \mathbb{R}$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2$, $I = ]0, +\infty[$, $F(1) = 1$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, $I = ]0, +\infty[$, $F(1) = 2$.

e) $f(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$, $I = \mathbb{R}$, $F(0) = 0$.

Correction de l'exercice 6

a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2$.

b) $F(x) = \sin(x) - 1$.

c) $F(x)2\sqrt{x} + 2x - 3$.

d) $F(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} + 1$.

e) $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+1} - \frac{\mathrm{e}}{2}$.

### Exercice 7.

Déterminez l'ensemble des primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \dfrac{6x+3}{x^2+x+1}$.

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$.

c) $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$.

d) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.

Correction de l'exercice 7

a) $F(x) = 3\ln\left(x^2 + x + 1\right) + c$.

b) $F(x) = \frac{2}{6}\sqrt{3x^2+1} + c$.

c) $F(x) = -\mathrm{e}^{-x^2} + c$.

d) $F(x) =?$.

## Exercice 8.

Justifiez dans chaque cas que la fonction $f$ admet des primitives sur l'intervalle $I$ et déterminez une primitive de $f$ sur $I$.

a) $f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{5x}{4}}$ et $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}\exp\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ et $I = ]1, +\infty[$.

c) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + x}{\left(\mathrm{e}^{2x} + x^2\right)^4}$ et $I = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\sqrt{\mathrm{e}^x + x}}$ et $I = [0, +\infty[$.

Correction de l'exercice 8

Les fonctions considérées sont toutes continues.

a) $F(x) = -2\frac{4}{5}\mathrm{e}^{-\frac{5x}{4}}$.

b) $F(x) = -\frac{1}{2}\exp\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

c) $F(x) = \frac{1}{2\times 5}\left(\mathrm{e}^{2x} + x^2\right)^{-5}$.

d) $F(x) = 2\sqrt{\mathrm{e}^x + x}$.

## Exercice 9.

Déterminez la primitive $F$ de $f$ sur $I$ qui vérifie la condition initiale donnée.

a) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $I = ]0, +\infty[$ et $F(1) = 1$.

b) $f(x) = 3\sin(2x)$, $I = \mathbb{R}$ et $F(0) = 2$.

c) $f(x) = \frac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 3}$, $I = \mathbb{R}$ et $F(0) = 0$.

Correction de l'exercice 9

a) $F(x) = -\frac{1}{4x^4} + 2$.

b) $F(x) = -\frac{3}{2}\cos(2x) + \frac{7}{2}$.

c) $F(x) = 3\ln(\mathrm{e}^x + 3) - 3\ln(3)$.

## Exercice 10.

On considère les fonctions $F$ et $G$ définies sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = 1 - x + x\ln(x)$ et $G(x) = x\left(\ln(x) - 1\right)$.

Démontrez que $F$ et $G$ sont des primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction de l'exercice 10

On vérifie $F' = G' = \ln$.

## 3 Exercices.

Exercice 11.

On considère la fonction $f$ définie sur $]1,+\infty[$par $f(x)=\frac{x+2}{x(x-1)^2}$.

1. Déterminez trois nombres réels $a$, $b$ et $c$ tels que : $f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$.
2. Déduisez-en une primitive $F$ de $f$ sur $]1,+\infty[$ telle que $F(2)=10$.

Correction de l'exercice 11

1. Déterminons $a$, $b$ et $c$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a(x-1)^2}{x(x-1)^2}+\frac{bx(x-1)}{x(x-1)^2}+\frac{cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{ax^2-2ax+a+bx^2-bx+cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2+(-2a-b+c)x+a}{x(x-1)^2} \end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ -2a-b+c &= 1 \\ a &= 2 \end{cases}$$

En résolvant le système : $a=2$, $b=-2$ et $c=3$.

$$\boxed{f(x)=\frac{2}{x}+\frac{-2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}.}$$

Exercice 12.

Déterminez toutes les primitives sur $]-1,+\infty[$ de la fonction $f$ définie par $f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$.

Correction de l'exercice 12

$f(x)=2+\frac{1}{x}$

$F(x)=2x+\ln(x)+c.$

Exercice 13.

Déterminez toutes les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f$ définie par $f(x)=\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}$.

Correction de l'exercice 13

$f(x)=1+\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$.

$F(x)=x+\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c.$

Exercice 14.

1. Soient $a$ et $b$ deux nombres réels.
   Dérivez la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \mathrm{e}^{x}\left(a\cos(x) + b\sin(x)\right)$.
2. Déduisez-en toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{x}\cos(x)$ et $g(x) = \mathrm{e}^{x}\sin(x)$.

Correction de l'exercice 14

1. $h'(x) = \mathrm{e}^{x}\left((a+b)\cos(x) + (b-a)\sin(x)\right)$.
2. D'après la question précédente avec $a = b = \frac{1}{2}$ : $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\left(\cos(x) + \sin(x)\right)$.
   Avec $a = -b = -\frac{1}{2}$ : $G(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\left(-\cos(x) + \sin(x)\right)$

# II Équations différentielles linéaires d'ordre un à coefficients constants.

Exemples.

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$ est une équation différentielle et une solution de cette équation différentielle est $x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x}$.

## 1 Vocabulaire.

Soient $a$, $b$ et $c$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et $a$ non identiquement nulle. On appelle équation différentielle linéaire d'ordre un toute équation de la forme $ay' + by + c = 0$.

Si $a$, $b$ et $c$ sont des fonctions constantes alors l'équation différentielle est dite linéaire d'ordre un à coefficients constants.

Si l'équation différentielle est linéaire d'ordre un à coefficients constants, puisque $a \neq 0$, il est possible de se ramener à une équation normalisée (ou résolue en $y$) : $y' + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a} = 0$.

Nous allons nous intéresser à cette dernière équation dite avec second membre, mais en modifiant les notations comme suit :

$$(E_1) : \ y' - ay = b,$$

où$(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Remarquons que le cas $a = 0$ correspondrait à une recherche de primitive de la fonction constante égale à $b$.

Nous serons amené à nous intéresser à l'équation différentielle sans second membre, appelée équation homogène :

$$(E_0) : \ y' - ay = 0.$$

Exercice 15.

Parmi les fonctions $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{4-x}$, $f_2 : x \mapsto -\mathrm{e}^{4x}$, $f_3 : x \mapsto \mathrm{e}^{4-\frac{1}{4}x}$ et $f_4 : x \mapsto 4\mathrm{e}^{\frac{1}{4}x}$, déterminez les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles proposées.

a) $y' = -y$.

b) $4y' = y$.

c) $y' - 4y = 0$.

d) $4y' + y = 0$.

## 2 L'équation homogène.

Proposition 3

L'équation différentielle $(E_0) : \ y' - ay = 0$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{ax}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Autrement dit l'ensemble des solutions de $(E_0)$ est $\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{ax} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Démonstration

Nous allons montrer que deux ensembles sont égaux : $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle et l'ensemble $E = \left\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{ax} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Une méthode classique pour démontrer une égalité de deux ensembles consiste à démontrer une double inclusion : $E \subset \mathscr{S}_0$ et $\mathscr{S}_0 \subset E$. Enfin, pour démontrer une inclusion $A \subset B$, il faut et il suffit de démontrer que tout élément de $A$ appartient aussi à $B$.

* Démontrons que $E \subset \mathscr{S}_0$.

  Soit $f \in E$. Donc il existe $\lambda_f \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto \lambda_f \mathrm{e}^{ax}$.

  On vérifie facilement que $f'(x) - af(x) = 0$ et donc $f \in \mathscr{S}_0$.

  Par conséquent

$$\boxed{E \subset \mathscr{S}_0.}$$

* Démontrons que $\mathscr{S}_0 \subset E$.

  Soit $g \in \mathscr{S}_0$. Autrement dit $g$ vérifie $g' - ag = 0$.

  Pour démontrer que $g$ est de la forme $\lambda \mathrm{e}^{ax}$ nous allons démontrer que $\frac{g(x)}{\mathrm{e}^{ax}} = \lambda$ pour tout $x$, *i.e* que la fonction est constante.

Soit $h : x \mapsto g(x)\mathrm{e}^{-ax}$.
$h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x$ réel, $h'(x) = g'(x)\mathrm{e}^{-ax} + ag(x)\mathrm{e}^{-ax} = \left[g'(x) - ag(x)\right]\mathrm{e}^{-ax} = 0$ puisque $g \in \mathscr{S}_0$.
De $h' = 0$ nous déduisons que $h$ est constante et donc qu'il existe $\lambda in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \lambda \mathrm{e}^{ax}$. Autrement dit $g \in E$.
Ceci étant vrai pour tout $g \in \mathscr{S}_0$,

$$\boxed{\mathscr{S}_0 \subset E.}$$

Puisque nous avons établi une double inclusion

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = E.}$$

■

**Exercice 16.**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a) $y' = 3y$.

b) $y' + 2y = 0$.

c) $2y' = y$.

d) $3y' - 5y = 0$.

**Corollaire 2 - Théorème de Cauchy-Lipschitz.**

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' - ay = 0 \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

**Remarques.**

1. La condition $y(\alpha) = \beta$ est appelée une condition initiale.
2. Il existe diverse formes de conditions initiales. $\lim_{-\infty} y = 1$ est une condition initiale.

**Exercice 17.**

a) Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E)$ : $y' = 2020y$.

b) Déterminez la solution $f$ de l'équation $(E)$ telle que $f(0) = 2$.

**Exercice 18.**

Résolvez les équations différentielles avec condition initiale.

a) $y' = \frac{1}{2}y$ et $f(0) = 1$.

b) $5y' = y$ et $f(1) = 0$.

c) $y' + y = 0$ et $f'(1) = 2$.

**Exercice 19.**

Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone. Tant qu'il est en vie, l'organisme d'un être vivant contient la même proportion de carbone 14. À sa mort la quantité de cet élément radioactif décroît.
On note $N(t)$ le nombre de noyaux de carbone 14 que contient un organisme $t$ années après sa mort.
On admet que la fonction $N$ est solution de l'équation différentielle $(E)$ : $y' = -0,000121y$.

a) Résolvez l'équation différentielle $(E)$ en prenant comme condition initiale $N(0) = N_0$ où $N_0 \in \mathbb{N}$.

b) On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps au bout duquel le nombre de noyaux à diminué de moitié. Calculez la demi-vie du carbone 14.

**Proposition 4**

L'ensemble des solutions de $(E_0)$ est un espace vectoriel.

Remarques.

1. Autrement dit c'est un ensemble stable par combinaisons linéaires. Si $f$ et $g$ sont des solutions de l'équation différentielle alors

## 3 L'équation avec second membre constant.

**Proposition 5 - Principe de superposition.**

$g$ est solution de $E_1$ si et seulement s'il existe des fonctions $f_1$ solution de $(E_1)$ et $f_0$ solution de $(E_0)$ telles que $g = f_1 + f_0$.

Remarques.

1. En superposant une solution de $E_0$) à une solution de $(E_1)$ on obtient une nouvelle solution de $(E_1)$.

2. Cette situation est souvent décrite en disant que les solutions de $(E_1)$ sont obtenues comme somme des solutions de $(E_0)$ et d'une solution particulière de $(E_1)$.

### Proposition 6

Soit $f_1$ une solution de $(E_1)$.

$$\mathscr{S}_1 = \left\{ f_0 - \frac{b}{a} \mid f_0 \in \mathscr{S}_0 \right\}.$$

### Démonstration

On démontre l'égalité d'ensembles par double inclusion.

■

### Corollaire 3 - Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' - ay = b \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$

admet une unique solution.

### Exercice 20.

On considère l'équation différentielle $(E)$ : $y' = -\frac{1}{2}y + 3$.

1. Donnez la seule solution constante sur $\mathbb{R}$ de $(E)$.
2. Déduisez-en toutes les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

### Exercice 21.

Résolvez sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a) $y' = -2y + 5$.

b) $y' = y - 3$.

c) $2y' + y = 4$.

d) $3y' - 6y = 1$.

### Exercice 22.

Déterminez la solution de l'équation différentielle vérifiant la condition.

a) $y' = 3y - 6$ et $y(0) = -1$.

b) $y' = -5y + 4$ et $y(1) = 0$.

c) $y' = y - 1$ et $y(2) = 1$.

Exercice 23.

On considère l'équation différentielle $(E):\ y' = 0,8y + 1,6$.

1. Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E)$.
2. Vérifiez que toutes les solutions de $(E)$ admettent une asymptote que vous préciserez.

## 4 Équation différentielle avec second membre quelconque.

Proposition 7

$(E_2):\ y' - ay = f$.
Soit $f_2$ une solution de $(E_2)$.

$$\mathscr{S}_2 = \{f_0 + f_2 \mid f_0 \in \mathscr{S}_0\}.$$

Exercice 24.

Vérifiez que $f$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E)$.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-5x+1} + \frac{3}{5}$ et $(E):\ y' = -5y + 3$.

b) $f(x) = 2x + 2$ et $(E):\ y' = -2y + 4x + 6$.

c) $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-2x}$ et $(E):\ y' = -2y + \mathrm{e}^{-2x}$.

Exercice 25.

Soit $(E):\ y' = 2y + 2x$ une équation différentielle.

1. Vérifiez que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x - \frac{1}{2}$ est une solution particulière de l'équation $(E)$.
2. Déduisez-en toutes les solutions de $(E)$.

Exercice 26.

Soient $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x}$ et l'équation différentielle $(E):\ y' = y + \mathrm{e}^{x}$.

1. Vérifiez que la fonction $f$ est une solution particulière de $(E)$.
2. Déduisez-en la seule solution $g$ de $(E)$ telle que $g(0) = 5$.

Correction de l'exercice 26

$f'(x) = e^x + xe^x$ et $f + e^x = xe^x + e^x$ donc $f$ est solution de $(E)$.

$(E)$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 1$ et $b(x) = e^x$. Comme $f$ en est une solution particulière, les solutions sont les fonctions $g_C(x) = Ce^x + xe^x$.

Si $g$ est la solution vérifiant $g(0) = 5$ alors $C = 5$ et donc $g(x) = 5e^x + xe^x$.

Exercice 27.

On considère l'équation différentielle $(E)$ : $y' + y = x^2 + x$

1. Trouvez les valeurs de $a$, $b$ et $c$ tels que la fonction $g$, définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de $(E)$.
2. Déduisez-en les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28.

On peut modéliser le taux d'alcool, en fonction du temps exprimé en heures, par une fonction $f$ définie sur $[0,005, +\infty[$.
On admet que $f$ est solution de l'équation différentielle $(E)$ : $y' = -y + ke^{-t}$ et $f(0,005) = 0$ où $k$ est une constante positive dépendant de la quantité d'alcool absorbée et de la corpulence de l'individu.

1. (a) Exprimez, en fonction de $k$, le nombre réel $a$ tel que la fonction $g$ définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = ate^{-t}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle $(E)$.
   (b) Déduisez-en l'expression de $f(t)$ en fonction de $k$.
2. Étudiez le sens de variation de $f$ et vérifiez qu'il ne dépend pas de $k$.
3. Trois heures après avoir consommé de l'alcool l'alcoolémie d'un individu est de $0,8$ g $\cdot$ $\ell$. Le taux maximum autorisé étant de $0,2$ g $\cdot$ $\ell$, combien de temps devra-t-il attendre avant de reprendre le volant ?

## 5 Exercices.

Exercice 29.

Exercice 30.