10 Produit scalaire.

I Produit scalaire de l'espace.

1 Définition, généralisation.

Étant donnés trois points A, B et C de l'espace il existe (au moins) un plan $\mathscr{P}$ qui les contient. Nous définirons le produit scalaire, dans l'espace, des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ par le produit scalaire, dans le plan $\mathscr{P}$, des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Autrement dit deux vecteurs de l'espace étant toujours coplanaires il est possible de faire leur produit scalaire comme en première.

2 Caractérisation par angle et norme.

Proposition 1 - caractérisation du produit scalaire par norme et angle.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de l'espace.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right).$$

Remarques.

1. Pour nous en géométrie norme et longueur sont confondues (ce qui n'est pas vrai si la base n'est pas orthonormée mais nous en parlerons plus tard). Dans les exercices de cette leçon on confondra le deux notions. De même l'angle entre les deux vecteurs est l'angle habituel entre deux droites sécantes (il faudra trouver des représentants judicieux).

3 Orthogonalité.

Définition 1

Soient :

. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *orthogonaux* si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarques.

1. Les droites et les plans étant définis par des vecteurs (le vecteur directeur pour l'une et les vecteurs d'une base pour l'autre) l'orthogonalité de vecteurs va

permettre de généraliser l'idée de perpendicularité en parlant d'orthogonalité. Ainsi deux droites non coplanaires pourront être orthogonales.

2. Dans la pratique et dans cette leçon, nous pourrons lire graphiquement que deux vecteurs sont orthogonaux lorsqu'ils sont des vecteurs directeurs de droites perpendiculaires.

4 Propriétés de linéarité.

Proposition 2 - Forme bilinéaire symétrique.

Soient :

. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace,

. α et β des réels.

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (commutativité ou symétrie).

(ii) $\vec{u} \cdot \left(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}\right) = \alpha\vec{u} \cdot \vec{v} + \beta\vec{u} \cdot \vec{w}$ (bilinéarité).

5 Identités de polarisation.

Corollaire 1 - Identités remarquables.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

(i) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$.

(ii) $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$.

(iii) $\left(\vec{u} - \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$.

Proposition 3 - Caractérisation du produit scalaire par les identités de polarisation.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

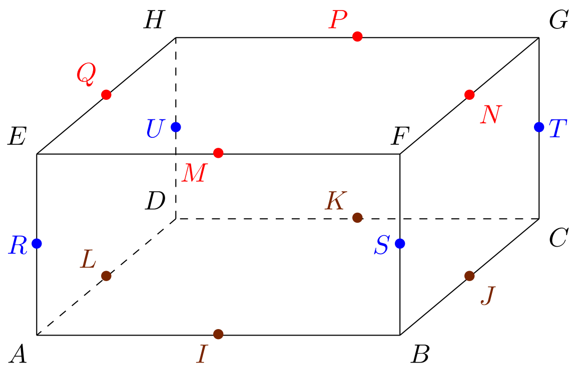
(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$.

(ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$.

(iii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$.

6 Exercices.

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. Les autres points sont les milieux des arêtes.



Exercice 1.

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur a calculez les produits scalaires :

a) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EH}$.
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH}$.
c) $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CB}$.
d) $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{EB}$.
e) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM}$.
f) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MB}$.
g) $\overrightarrow{DU} \cdot \overrightarrow{IF}$.
h) $\overrightarrow{JN} \cdot \overrightarrow{RS}$.
i) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Correction de l'exercice 1

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH} = 0$, $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CB} = -a^2$ et $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{EB} = 2a^2$.

Exercice 2.

Soient A, B et C des points de l'espace tels que : $AB = 7$, $AC = 8$, $BC = 5$.

1. À l'aide d'une formule de polarisation démontrez que

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(BC^2 - AB^2 - AC^2\right).$$

2. Déduisez-en les valeurs du produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. Déterminez une valeur approchée à $0,01^\circ$ près de l'angle $\widehat{BAC}$ en degrés.

Exercice 3.
Soient A, B et C des points de l'espace tels que : $AB = 6$, $AC = 5$, $BC = 8$.

1. À l'aide d'une formule de polarisation déterminez le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. Déduisez-en $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3. Déterminez une valeur approchée à $0,01°$ près de l'angle $\widehat{ABC}$ en degrés.

Exercice 4.
Soient A, B, C et D quatre points de l'espace tels que $ABCD$ est un parallélogramme.

1. À l'aide d'une formule de polarisation démontrez que
$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}(BD^2 - AC^2).$$
2. Démontrer alors la propriété suivante : « Un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses diagonales sont de même longueur. »

Exercice 5.
Soient A, B, C et D quatre points de l'espace tels que $ABCD$ est un parallélogramme. On suppose que $AC = 10$ et $BD = 4$.
À l'aide d'une formule de polarisation calculez le produit scalaire $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

II Bases orthonormées de l'espace.

Le produit scalaire peut-il être défini uniquement par les coordonnées ? La réponse est en général non si nous souhaitons conserver les notions de longueur et de perpendicularité usuelles.

Cette leçon nous place dans les conditions pour que l'orthogonalité coïncide avec la perpendicularité et la norme avec la longueur au sens usuel pour un produit scalaire construit à partir des coordonnées.

1 Base orthonormée, repère orthonormé.

Définition 2

(i) On appelle *base orthonormale de l'espace* tout triplet $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de trois vecteurs de l'espace tel que $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = 0$ et $||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}|| = ||\overrightarrow{k}|| = 1$.

(ii) On appelle *repère orthonormal de l'espace* tout quadruplet $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ où O est un point et $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ une base orthonormale.

2 Produit scalaire et coordonnées.

Proposition 4 - Perpendicularité dans l'espace.

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ et $C(x_C, y_C, z_C)$. trois points distincts deux à deux de l'espace leur coordonnées étant données relativement à une base orthonormée.

$(AB) \perp (AC)$ si et seulement si $x_{\overrightarrow{AB}} x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}} y_{\overrightarrow{AC}} + z_{\overrightarrow{AB}} z_{\overrightarrow{AC}} = 0$

Proposition 5 - Distance euclidienne dans l'espace.

Soient :

. $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace,

. $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace.

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

3 Exercices.

Exercice 6.

Dans un repère de l'espace démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Exercice 7.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère les points $A(1,7,-2)$, $B(4,6,-5)$ et $C(3,1,2)$.

1. Justifiez que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
2. Qu'en déduisez-vous pour le triangle ABC.

Correction de l'exercice 7

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (4-1)\times(3-1)+(6-7)\times(1-7)+(-5-(-2))\times(2-(-2)) = 6+6-12 = 0$
2. ABC rectangle en A.

Exercice 8.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé on considère les points $A(4,-2,0)$, $B(6,4,-2)$ et $C(12,6,0)$. Quelle la nature du triangle ABC ?

Exercice 9.

L'espace étant rapporté à une repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, $A(3,2,1)$, $B(-2,1,5)$ et $C(1,0,1)$. Déterminez une valeur approchée au degré près de $\widehat{ABC}$.

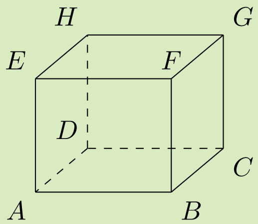
Correction de l'exercice 9

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}$.

Donc, le repère étant orthonormé, $AB = \sqrt{42}$ et $BC = \sqrt{26}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 30$.
Donc $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{30}{\sqrt{26}\times\sqrt{42}}$. $\widehat{ABC} \approx 25°$.

Exercice 10.

On considère le cube $ABCDEFGH$ qui est représenté ci-dessous.



Dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées : $M\left(1; 1; \frac{3}{4}\right)$, $N\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$, $P\left(1; 0; -\frac{5}{4}\right)$.

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
2. Placer les points M, N et P sur la figure donnée.
3. Justifier que les points M, N et P ne sont pas alignés.
   Dès lors les trois points définissent le plan (MNP).
4. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$, puis en déduire la nature du triangle MNP.
   (b) Calculer l'aire du triangle MNP.

III Orthogonalité et parallélisme dans l'espace.

1 Vecteur normal.

Nous avons vu que pour définir une droite du plan on peut en donner un point et, soit un vecteur directeur, soit un vecteur normal. Pour un plan un vecteur directeur ne suffit pas ; pour définir la direction d'un plan il faut une base du plan (deux vecteurs non nuls et non colinéaires). Que serait un vecteur normal à un plan ?

Définition 3

Soient :

. $\mathscr{P}$ un plan de l'espace,

. $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathscr{P}$,

. $\vec{n}$ un vecteur non nul.

Nous dirons que $\vec{n}$ est *normal à $\mathscr{P}$* si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Remarques.

1. Tout plan admet un vecteur normal. Si c'est intuitif, la justification apparaîtra clairement avec les équations cartésienne du plan.
2. Si $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs d'une base alors il est orthogonal à tous les vecteurs de la direction du plan puisque les vecteurs sont des combinaisons linéaires des vecteurs de la base (confer proposition infra).
3. Il n'y a pas unicité du vecteur normal. Tout vecteur colinéaire à un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est encore un vecteur normal à $\mathscr{P}$. Plus précisément l'ensemble des vecteur normaux à $\mathscr{P}$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{n}$ (un quelconque vecteur normal).

Proposition 6

Un vecteur non nul est normal à un plan si et seulement si il est orthogonal à tout vecteur de la direction de ce plan.

Démonstration

Soient $\mathscr{P}$ un plan.

* Supposons que $\vec{n}$ est orthogonal à tous les vecteurs de la direction de $\mathscr{P}$ et montrons que $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs de tute base de $\mathscr{P}$.

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de la direction de $\mathscr{P}$.
En particulier $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{i}$ et à $\vec{j}$ qui sont des vecteurs de la direction de $\mathscr{P}$.

* Supposons que $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ d'une direction de $\mathscr{P}$ et montrons qu'alors $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de la direction de $\mathscr{P}$.

Soit $\vec{u}$ une vecteur de la direction de $\mathscr{P}$. Ainsi $\vec{u}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$: $\exists (a,) \in \mathbb{R}^2,\ \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.
Nous vérifions que

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{u} &= \vec{n}\left(a\vec{i} + b\vec{j}\right)\\ &= a\vec{n} \cdot \vec{i} + b\vec{n} \cdot \vec{j}\end{aligned}$$

Et puisque $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{i}$ et $\vec{j}$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$$

■

Proposition 7

Étant donné un vecteur non nul $\vec{n}$ et un point A, il existe un unique plan normal à $\vec{n}$ et passant par A.

Remarques.

1. Ainsi pour définir un plan on peut au choix donner :
   (i) trois points distincts deux à deux et non alignés,
   (ii) un point et une base,
   (iii) un point et un vecteur normal.
2. Une façon de voir que nous utiliserons plus tard pour l'équation cartésienne : le plan est formé de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

2 Définitions.

Définition 4

(i) Une droite est *parallèle* à une autre droite si au moins un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.

(ii) Deux droites sont *orthogonales* si un vecteur directeur de l'une est orthogonale à une vecteur directeur de l'autre.

(iii) Une droite est *orthogonale* à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est colinéaire à un vecteur normal à ce plan.

(iv) Un droite est *parallèle* à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à vecteur normal à ce plan.

(v) Deux plans sont *parallèles* si et seulement si un vecteur normal à l'un est colinéaire à un vecteur normal de l'autre.

(vi) Deux plans sont dit *perpendiculaires* si un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal à l'autre.

3 Exercices.

Exercice 11.

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

1. Montrez que $\overrightarrow{CG}$ est normal à (FGH).
2. Démontrez que $\overrightarrow{AH}$ et normal à (EDC).

Exercice 12.

Dans chaque cas déterminez si le vecteur $\vec{w}$ est normal à un plan $\mathscr{P}$ de base $(\vec{u}, \vec{v})$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}12\\-4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-7\\8\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-11\\-78\\-60\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}10\\-3\\13\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}10\\-1\\8/7\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}1/2\\3\\-7/4\end{pmatrix}$.

Exercice 13.

On se place dans un repère de l'espace. Soient $\mathscr{D}$ la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par le point A et $\mathscr{D}'$ la droite de vecteur directeur $\vec{v}$ et passant par le point B. Déterminez si les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales.

a) $A(13;-6;1)$, $B(3;4;-7)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-4\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}$.

b) $A(-5;23;7)$, $B(1;9;4)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-4\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-3\\7\end{pmatrix}$.

c) $A(11;2;-3)$, $B(-3;2;5)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}9\\-2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0,2\\0,3\\0,4\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 13

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = -7 \neq 0$ donc les droites ne sont pas orthogonales.

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ donc les droites sont orthogonales.

c) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ donc les droites sont orthogonales.

Exercice 14.

Dans le repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne $A(2,-3,4)$, $B(1,2,-11)$, $C(-4,5,-9)$, $D(-8,3,4)$ et $E(-3,10,6)$.

1. Démontrez que les points A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrez que les droites (AB) et (DE) sont orthogonales.
3. Démontrez que la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Correction de l'exercice 14

1. * $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\8\\-13\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-10\\6\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$.

   * $\begin{vmatrix}-6 & -10\\ 8 & 6\end{vmatrix} = -6\times 6 - 8\times(-10) = 44 \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

   Ainsi $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est une base d'un plan et enfin

   A, B et C définissent bien un plan.

2. $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}5\\7\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE} = -6\times 5 + 8\times 7 - 13\times 2 = 0$.
3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE} = 0$.

Exercice 15.

L'espace étant muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(2,-3,5)$, $B(1,0,7)$ et $C(-4,1,3)$.

1. Démontrez que A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrez que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 16.

Soit $\mathscr{P}$ un plan dirigé par deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ (autrement dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base de $\mathscr{P}$). Déterminez les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathscr{P}$.

Correction de l'exercice 16

$\vec{n}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Supposons par exemple $x=1$.

$\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ donc $1\times 1+1\times y+2\times z=0$ et $-1\times 1+2\times y+-3\times z=0$.

Donc

$$\begin{cases} y+z=-1\\ 2y-3z=1\end{cases}$$

$z=-\frac{3}{5}$ et $y=-\frac{4}{5}$.

Exercice 17.

Dans un repère orthonormé de l'espace on considère les points $A(-4;0;0)$, $B(0;-3;0)$, $C(3;1;0)$, $D(-1;4;0)$, $E(-4;0;5)$, $F(0;-3;5)$, $G(3;1;5)$ et $H(-1;4;5)$.

1. Montrer que ce solide $ABCDEFGH$ est un cube.
2. Soient I et J les milieux respectifs des segments $[FG]$ et $[FB]$. On souhaite montrer que les droites (AI) et (JH) sont perpendiculaires.
   (a) Déterminez les coordonnées des points I et J, puis montrez que les droites (AI) et (JH) sont orthogonales.
   (b) Montrez que le point $K\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{10}{3}\right)$ appartient aux droites (AI) et (JH). Concluez

IV Projeté orthogonal.

1 Projeté orthogonal.

Vous avez vu en seconde le projeté orthogonal d'un point sur une droite. Voyons en trois dimensions.

Proposition 8 et définition.

Soient A un point et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace.
Il existe un unique plan $\mathscr{P}$ orthogonal à $\mathscr{D}$ et contenant A. $\mathscr{D}$ est sécante avec $\mathscr{P}$ en un unique point appelé *le projeté orthogonal* de A sur $\mathscr{D}$.

Soient A un point et $\mathscr{P}$ une droite de l'espace.
Il existe un unique droite $\mathscr{D}$ orthogonale à $\mathscr{P}$ et contenant A. $\mathscr{P}$ est sécant avec $\mathscr{D}$ en un unique point appelé *le projeté orthogonal* de A sur $\mathscr{P}$.

Remarques.

1. La dualité de ces deux définitions est remarquable.

2 Distance d'un point à un plan.

Proposition 9 et définition

Soient :

. A et B des points de l'espace,

. $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace,

. $\mathscr{P}$ le plan de vecteur normal $\vec{n}$ passant par B.

Le projeté orthogonal H, de A sur le plan $\mathscr{P}$, est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de A.
On appelle *distance de A à $\mathscr{P}$* le nombre positif :

$$AH = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}.$$

Remarques.

1. Autrement dit H est le point de $\mathscr{P}$ qui réalise une distance minimale de A à $\mathscr{P}$.

3 Distance d'un point à une droite.

Proposition 10 et définition

Soient :

. A et B des points de l'espace,

. $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace,

. $\mathscr{D}$ la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par B.

Le projeté orthogonal H, de A sur la droite $\mathscr{D}$, est le point de $\mathscr{D}$ le plus proche de A.
On appelle *distance de A à $\mathscr{D}$* le nombre positif :

$$AH = \left\|\overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}\right\|.$$

4 Exercices.

Exercice 18.

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1. On note L, I et J les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[EF]$ et $[HG]$ et K le centre du carré $BCGF$.

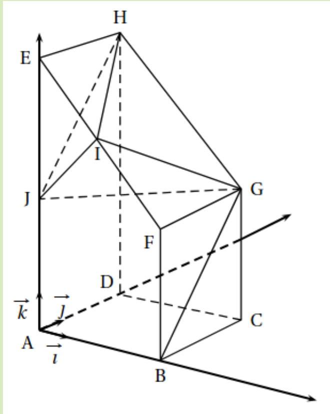
1. Citez une base orthonormée de l'espace en utilisant les points cités.
2. Citez deux repères orthonormés de l'espace en utilisant les points cités.
3. On se place dans le repère de l'espace $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
   (a) Démontrez que $\overrightarrow{LK}$ est normal au plan (IJB).
   (b) Déduisez-en la distance du point L au plan (IJB).

Correction de l'exercice 18

1. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
2. $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ et $\left(E; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$
3. (a) $I\left(\frac{1}{2}, 0; 1\right)$, $J\left(\frac{1}{2}, 1; 1\right)$, $B(1,0,0)$.
   $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\1\end{pmatrix}$.
   $L\,(0,1,0)$ et $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
   $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}1\\0\\1/2\end{pmatrix}$.
   (b) $d(L,(IJB)) = \frac{\left|\overrightarrow{LB}\cdot\overrightarrow{LK}\right|}{\|\overrightarrow{LK}\|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}}$.

Exercice 19.

On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE, trapèze rectangle en A.



On associe à ce prisme le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ tel que :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{4}\vec{AB}, \quad \vec{\jmath} = \frac{1}{4}\vec{AD}, \quad \vec{k} = \frac{1}{8}\vec{AE}.$$

De plus on a $\vec{BF} = \dfrac{1}{2}\vec{AE}$.
On note I le milieu du segment [EF].
On note J le milieu du segment [AE].

1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ).
3. On note L le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ).
   Montrer que les coordonnées de L sont $\left(\dfrac{8}{3}\ ;\ \dfrac{4}{3}\ ;\ \dfrac{16}{3}\right)$. *On admettra que L $\in$ (IGJ).*
4. Calculer la distance du point H au plan (IGJ).
5. Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.
6. En déduire le volume du tétraèdre IGJH.

   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

Correction de l'exercice 19

1. $J(0,0,4)$, $I(2,0,6)$.
2. $G(4,4,4)$. $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.
3. $H(0,4,8)$, $\overrightarrow{LH}\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$ donc $\frac{8}{3}\vec{n} = \overrightarrow{LH}$. Donc $\overrightarrow{LH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, enfin $\overrightarrow{LH}$ est

normal à (IGJ). Comme de plus $L \in (IGJ)$, L est le projeté orthogonal de H sur (IGJ).

4. $d(H;(IGJ)) = HL$. Le repère étant orthonormé :

$$\begin{aligned} HL &= \left\|\overrightarrow{HL}\right\| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} \\ &= \frac{64}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

5.

$$\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$$

Le repère étant orthonormé

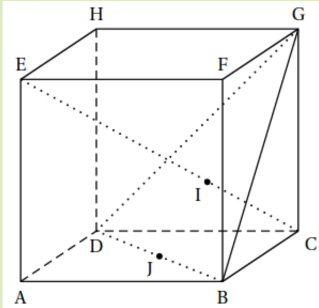
$$\boxed{IGJ \text{ est rectangle en } I.}$$

6.

$$\begin{aligned} \mathscr{V} &= \frac{1}{3} \times \mathscr{A}(IGJ) \times HL \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times IG \times IJ \times \frac{64}{3}\sqrt{3} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} \times \frac{64}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Exercice 20.

On considère le cube ABCDEFCH d'arête 1.
On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\ ;\ \vec{AB},\ \vec{AD},\ \vec{AE}\right)$.



1. Donner dans ce repère les coordonnées des points E, C, G.
2. Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).
3. (a) Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.
   (b) En déduire que la distance du point E au plan (GBD) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
4. (a) Démontrer que le triangle BDG est équilatéral.
   (b) Calculer l'aire du triangle BDG.
   On pourra utiliser le point J, milieu du segment [BD].
5. Justifier que le volume du tétraèdre EGBD est égal à $\frac{1}{3}$.

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}Bh$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.

Correction de l'exercice 20

1. $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $G(1,1,1)$.
2. $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{GD}$.
3. (a) Soit $Z\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

   * $\overrightarrow{GZ}\begin{pmatrix}-1/3\\-1/3\\-2/3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{GZ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GD}$. Donc $Z \in (GBD)$.
   * $\overrightarrow{ZE}\begin{pmatrix}-2/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{ZE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EC}$.

   Donc $Z \in (EC)$.

$$\boxed{Z = I.}$$

(b) Le repère étant orthonormé

$$\begin{aligned} d(E,(GBD)) &= EI \\ &= \left\|\overrightarrow{EI}\right\| \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

4. (a) $BD = GB = GD = \sqrt{2}$.
   (b) Théorème de Pythagore : $GJ = \frac{1}{2}\sqrt{6}$. Donc $\mathscr{A}(BDG) = \frac{1}{2}BD \times GJ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
5.

$$\begin{aligned} \mathscr{V} &= \frac{1}{3}\mathscr{A}(BDG)EI \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\sqrt{3}\times\frac{2}{3}\sqrt{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

V Représentation paramétrique d'une droite.

1 La représentation paramétrique.

Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace rapporté à repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ passant par $A(1,-2,3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Dire que $M(x,y,z)\in\mathscr{D}$ équivaut à dire que $\overrightarrow{AM}$ et colinéaire à $\vec{u}$.
Autrement dit, puisque $\vec{u}\neq 0$, il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.
En considérant les coordonnées nous obtenons donc

$$\left\{\begin{aligned} x-1 &= t\times 2 \\ y+2 &= t\times 1 \\ z-3 &= t\times -1 \end{aligned}\right.$$

Ainsi dire que $M\in\mathscr{D}$ signifie qu'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que les coordonnées de M sont données par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+1 \\ y &=& t-2 \\ z &=& -t+3 \end{array}\right.$$

Formellement c'est comme si nous avions $M = t\vec{u} + A$.

Proposition 11 et définition.

Soient :

. $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

. $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace,

. $\mathscr{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

$M \in \mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & at + x_A \\ y & = & bt + y_A \\ z & = & ct + z_A \end{array}\right.$$

Nous dirons alors que ce système d'équation est une *représentation paramétrique* de la droite $\mathscr{D}$.

Remarques.

1. En physique nous utiliserons une notation fonctionnelle pour indiquer la dépendance de x à t : $x(t) = at + x_A$.
   D'ailleurs si $x(t)$ représente l'abscisse d'un point M, t sera souvent le temps.
2. À chaque vecteur directeur et à chaque point de la droite correspondent une nouvelle représentation paramétrique : il y a donc une infinité de représentations paramétriques d'une droite.
3. Formellement (il ne faut pas l'écrire comme ceci) la représentation paramétrique correspond à : $M = A + t\vec{u}$. C'est une bonne astuce mnémotechnique.
4. Il n'est pas forcément étonnant que la représentation paramétrique d'une droite fasse apparaître des fonctions affines.

Les usages que vous ferez de la représentation paramétrique des droites : vérifier que des droites sont sécantes, ou parallèles, ou orthogonales, ou non coplanaires.

Il faut donc savoir trouver la représentation paramétrique à partir d'un point et d'un vecteur directeur, de deux points mais aussi à partir de la représentation paramétrique retrouver un point de la droite et un vecteur directeur.

Exemples.

1. La droite passant par $A(1;2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique
2. La droit passant par $A(1;2;3)$ et $B(5;-6;7)$ a pour représentation paramétrique
3. On considère la droite $\mathscr{D}$ dont la représentation paramétrique est
$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 2t+3 \\ y & = & 1 \\ z & = & t-2 \end{array}\right.$$
un vecteur directeur et deux points de la droite

2 Exercices.

Exercice 21.

Donnez une représentation paramétrique de la droite Δ de $\mathscr{E}_3$ définie par :

a) $A(-1,-2,1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$,

b) $A(1,0,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$,

c) $A(17,37,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

d) $A(100;2,4;-\frac{1}{3})$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{\pi}\\3\times 10^2\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$,

e) $A(2,3,4)$ et $B(-2,6,5)$,

f) $A(6,-2,1)$ et $B(1,2,-1)$,

g) $A(5,7,0)$ et $B(0,1,2)$,

h) $A(1,2,3)$ et $B(-2,2,2)$,

i) $A(0,-1,1)$ et $B(0,2,1)$,

j) $A(2,0,4)$ et $B(1,0,3)$,

k) $A(1,-1,0)$ et $B(0,2,0)$,

l) $A(0,0,3)$ et $B(0,0,-2)$,

Correction de l'exercice 21

a)
$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & t-1 \\ y & = & 2t-2 \\ z & = & -3t+1 \end{array}\right.$$

b)
$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 2t+1 \\ y & = & -t \\ z & = & 4t \end{array}\right.$$

c)
$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 17 \\ y & = & t+37 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

d)
$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & \sqrt{\pi}t+100 \\ y & = & -t+2,4 \\ z & = & \frac{2}{3}t-\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

e)
$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & -4t+2 \\ y & = & 3t+3 \\ z & = & t+4 \end{array}\right.$$

f)
$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & -5t+6 \\ y & = & 4t+-2 \\ z & = & -2t+1 \end{array}\right.$$

g)
$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & -5t+5 \\ y & = & -6t+7 \\ z & = & 2t \end{array}\right.$$

h)
$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & -3t+1 \\ y & = & 2 \\ z & = & -t+3 \end{array}\right.$$

i)
$$\left\{\begin{array}{ll} x & = \\ y & = \\ z & = \end{array}\right.$$

j)
$$\left\{\begin{array}{ll} x & = \\ y & = \\ z & = \end{array}\right.$$

k)
$$\left\{\begin{array}{ll} x & = \\ y & = \\ z & = \end{array}\right.$$

Exercice 22.

Donnez un vecteur directeur et deux points des droites dont les représentations paramétriques sont données :

a) $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 3t+1 \\ y & = & 2t-3 \\ z & = & -4t+2 \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}$

b) $\left\{\begin{array}{lll} x & = & -2t+2 \\ y & = & t-2 \\ z & = & 6t+3 \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}$

c) $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1 \\ y & = & -t-3 \\ z & = & t+2 \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}$

d) $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 2t \\ y & = & 3t-3 \\ z & = & 4 \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}$

Correction de l'exercice 22

a) $(1;-3;2)$, $(13;17;-38)$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b) $(2;-2;3)$, $(-2;0;15)$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

c) $(1;-3;2)$, $(1;-6;5)$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) $(0;-3;4)$, $(20;27;4)$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 23.

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont-elles égales sachant que :

$$\mathscr{D} : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -5t-3 \\ y & = & -17t+4 \\ z & = & -2t+2 \end{array}\right. ,\ t \in \mathbb{R} \text{ et } \mathscr{D}' : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 25t-8 \\ y & = & 85t-13 \\ z & = & 10t \end{array}\right. ,\ t \in \mathbb{R}$$

Correction de l'exercice 23

Les deux droites ont des vecteurs directeurs colinéaires donc elles sont parallèles.

De plus : $\left\{\begin{array}{l} -5t_1-3 = 25t_2-8 \\ -17t_1+4 = 85t_2-13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5t_1+25t_2 = 5 \\ 17t_1+85t_2 = 17 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t_1+5t_2 = 1 \\ t_1+5t_2 = 1 \end{array}\right.$.

Si $t_1 = 1$ alors $t_2 = 0$ et effectivement pour $t_1 = 1$ et $t_2 = 0$ on obtient un même point avec les deux droites.

Exercice 24.

Déterminez si les droites suivantes de $\mathscr{E}_3$ rapporté à un repère, sont sécantes.

a) $\Delta_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & -2t-3 \\ z & = & t+1 \end{array}\right. ,\ t \in \mathbb{R}$ et $\Delta_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t \\ y & = & 3t-3 \\ z & = & 4t+1 \end{array}\right. ,\ t \in \mathbb{R}$.

b) Δ_1 qui passe par $A_1(1,3,4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et Δ_2 qui passe par $A_2(-1,3,4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_2\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 24

1.
2. $\vec{u}_2 = 3\vec{u}_1$ donc les droites sont parallèles.
3. Même système que celui du a mais au lieu de $4+1$ il y a $4t+1$.

   On vérifie que les vecteurs directeurs ne sont pas parallèles.

   * Analyse.

     Si $M(x,y,z) \in \Delta_1 \cap \Delta_2$ alors il existe des réels t_1 et t_2 tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} t_1 = 2t_2 \\ -2t_1-3 = 3t_2-3 \\ t_1+1 = 5 \end{array}\right.$$

     De la première équation nous déduisons : $t_1 = 2t_2$.
     En substituant dans la seconde : $-2(2t_2)-3 = 3t_2-3$ et donc $t_2 = 0$.
     Puis $t_1 = \frac{1}{2}t_2 = 0$.
     Ainsi s'il y a un point commun aux deux droites il ne peut être obtenu que pour $t_1 = t_2 = 0$.

* Synthèse.
  Pour $t_1 = 0$ le point de Δ_1 a pour coordonnées $(0; -3; 1)$.
  Pour $t_2 = 0$ le point de Δ_2 a pour coordonnées $(0; -3; 5)$.

$$\boxed{\Delta_1 \text{ et } \Delta_2 \text{ ne sont pas sécantes.}}$$

Exercice 25.

Déterminez les droites parallèles parmi
$\Delta_1 : \begin{cases} x &= 3t+1 \\ y &= 2t-3 \\ z &= -t+1 \end{cases}$, $\Delta_2 : \begin{cases} x &= 2t-17 \\ y &= -5t+7 \\ z &= t+45 \end{cases}$, $\Delta_3 : \begin{cases} x &= 4t+24 \\ y &= -10t-3 \\ z &= 2t-\pi \end{cases}$, $\Delta_4 :$ $\begin{cases} x &= 3t+12 \\ y &= 2t-18 \\ z &= -t+34 \end{cases}$, $\Delta_5 : \begin{cases} x &= -6t+1 \\ y &= -4t-3 \\ z &= 2t+1 \end{cases}$.

Exercice 26.

Soient $\Delta_1 : \begin{cases} x &= 7t-2 \\ y &= -2t+3 \\ z &= t+1 \end{cases}$ une droite et $A(1, 0, 1)$ un point.
Déterminez une représentation paramétrique de la droite Δ_2 parallèle à Δ_1 et passant par A.

Correction de l'exercice 26

$$\Delta_2 : \begin{cases} x &= 7t1 \\ y &= -2t \\ z &= t+1 \end{cases}$$

Exercice 27.

Soit $ABCD$ un tétraèdre.
L'espace est rapporté au repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.
On appelle I et J les milieux respectifs de $[DC]$ et de $[BC]$.
Soient E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

1. Déterminez les coordonnées des points I, J, E et F.
2. Démontrez que (EF) est parallèle à (IJ).

Correction de l'exercice 27

1. * Identité du parallélogramme : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$. Donc $I\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

* Identité du parallélogramme : $J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$.
* $E\left(\frac{1}{4};0;0\right)$.
* $F\left(0;0;\frac{1}{4}\right)$.

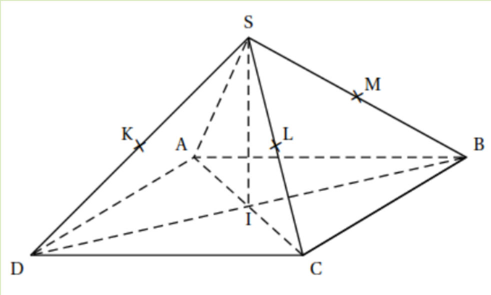
2. $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1/4\\0\\1/4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.

$$\boxed{(EF) \parallel (IJ).}$$

Exercice 28.

1. Déterminez une représentation paramétrique de la droite (AB) où $A(1,-1,3)$ et $B(3,2,4)$.
2. On considère le point $E(-5,7,1)$.
   Déterminez une représentation paramétrique de la droite d contenant E et parallèle à (AB).
3. On considère le point $F(-1,13,3)$.
   (a) Justifiez que (AF) et d ne sont pas parallèles.
   (b) Déterminez les coordonnées de leur point d'intersection s'il existe.

Exercice 29.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{I}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{IC}},\ \overrightarrow{\mathrm{IB}},\ \overrightarrow{\mathrm{IS}}\right)$. Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants : I(0 ; 0 ; 0) ; A(−1 ; 0 ; 0) ; B(0 ; 1 ; 0) ; C(1 ; 0 ; 0) ; D(0 ; −1 ; 0) ; S(0 ; 0 ; 1).

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1-t\\ y &=& t\\ z &=& -t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1+2t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+2t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **c.** $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1-t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 1-t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

Correction de l'exercice 29

1. c.
2. b. Un raisonnement sur le signe des coordonnées suffit.
3. b.
4. c. Point S et vecteur $\overrightarrow{AS}$.

Exercice 30.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère :

- La droite $\mathcal{D}$ passant par les points A$(1\ ;\ 1\ ;\ -2)$ et B$(-1\ ;\ 3\ ;\ 2)$.
- La droite $\mathcal{D}'$ de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -4+3t \\ y & = & 6-3t \\ z & = & 8-6t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Question 1 : Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite $\mathcal{D}'$?

a. $\mathrm{M}_1(-1;3;-2)$ **b.** $\mathrm{M}_2(11;-9;-22)$ **c.** $\mathrm{M}_3(-7;9;2)$ **d.** $\mathrm{M}_4(-2;3;4)$

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ est :

a. $\vec{u_1}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{u_2}\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$ **c.** $\vec{u_3}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ **d.** $\vec{u_4}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

Question 3 : Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont :

a. sécantes **b.** strictement parallèles **c.** non coplanaires **d.** confondues

Correction de l'exercice 30

1. b. On résout les systèmes.
2. c. Immédiat.
3. a. Parallèles mais $A \notin \mathscr{D}$.

Exercice 31.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 0 ; 2), B(2 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 2) et la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+2t \\ y &=& -2+t \\ z &=& 4-t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

1. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

   Réponse A : M(2 ; 1 ; −1) ; **Réponse B :** N(−3 ; −4 ; 6) ;
   Réponse C : P(−3 ; −4 ; 2) ; **Réponse D :** Q(−5 ; −5 ; 1).

2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées :

   Réponse A : $\begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$; **Réponse B :** $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
   Réponse C : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ **Réponse D :** $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

   Réponse A : $\left\{\begin{array}{l} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 2 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$ **Réponse B :** $\left\{\begin{array}{l} x = 2-t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

   Réponse C : $\left\{\begin{array}{l} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = 2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$ **Réponse D :** $\left\{\begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 2-2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

4. On considère le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

   Réponse A : $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires ; **Réponse B :** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
   Réponse C : D a pour coordonnées (3 ; −1 ; −1) ; **Réponse D :** les points A, B, C et D sont alignés.

Correction de l'exercice 31

1. b.
2. c.

3. b. Avec B et $\overrightarrow{BA}$.
4. a. Combinaison linéaire $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$.

Exercice 32.

Soient d et d' deux droites dont on donne une représentation paramétrique :

$$d : \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -3t + 1 \\ z = t + 2 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \quad d' : \begin{cases} x = t' - 1 \\ y = -2t' \\ z = 4 \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}$$

1. Pour chaque droite donnez un point et un vecteur directeur.
2. Les droites d et d' sont-elles parallèles ? sécantes ?
3. Que pouvez-vous conclure ?

Correction de l'exercice 32

1. $A(3;1;2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $B(-1;0;4)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ pas parallèles.

   $-2t + 3 = t' - 1 \Leftrightarrow t' = -2t + 2$ donc $-3t + 1 = -2(-2t + 2) \Leftrightarrow t = \frac{5}{7}$. Or $\frac{5}{7} + 2 \neq 4$ donc pas de point d'intersection. Pas sécantes.
3. Les droites sont non coplanaires.

Exercice 33.

1. Polynésie 13 mars 2023 exercice 2.
2. Amérique du Nord 19 mai 2022 exercice 3.

VI Équations cartésiennes d'un plan.

1 Équations.

Proposition 12 - Équations cartésiennes d'un plan.

Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace

Il existe des réels a, b, c et d (avec a, b et c non tous nuls) tels que $\mathscr{P}$ soit l'ensemble des points $M(x, y, z)$ pour lesquels $ax + by + cz + d = 0$.

Remarques.

1. L'équation $ax + by + cz + d = 0$ est appelée *une équation cartésienne* du plan.
2. Il n'y a pas unicité de l'équation cartésienne d'un plan. Si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation d'un plan alors $(ma)x + (mb)y + (mc)z + (md) = 0$ en est aussi une. Les coefficients des diverses équations cartésiennes d'un même plan sont proportionnels les uns aux autres.

Exercice 34.

On considère un plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $2x - 3y + 4z + 1 = 0$. Démontrez que $A(1, -3, 2)$ n'appartient pas à $\mathscr{P}$.

Correction de l'exercice 34

$2 \times 1 - 3 \times (-3) + 4 \times 2 + 1 = 20 \neq 0$.

2 Vecteur normal.

Proposition 13

Soient :

. a, b, c et d des réels a, b et c étant non tous nuls.

Si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne d'un plan $\mathscr{P}$ alors $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

Exercice 35.

Déterminez un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $2x + y - 3z + 14 = 0$.

Correction de l'exercice 35

$\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

Exercice 36.

Déterminez une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(2; 3; 1)$ et de vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 36

On recherche une équation cartésienne de la forme $3x - y - 7z + d = 0$ en considérant le vecteur normal.

Puis, comme $A \in \mathscr{P}$, on doit avoir $3x_A - y_A - 7z_A + d = 0$.

D'où : $d = 4$.

Exercice 37.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points : $A(4\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$ et $C(0\ ;\ 0\ ;\ 2)$.

1. Montrez que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
2. Déduisez-en une équation cartésienne de (ABC).

Correction de l'exercice 37

1. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls et non colinéaires donc (ABC) est bien un plan, de plus ils constituent une base de ce plan.
   Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$ $\vec{n}$ est bien normal à (ABC).
2. Donc $x + y + 2z + d = 0$ et comme $A \in (ABC)$, $d = -4$.

Exercice 38.

Soit $A(-1, 2, 5)$ un point de l'espace rapporté à un repère et $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$ un vecteur.

1. Déterminez une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
2. Soit $B(3, 8, 7)$. Déterminez une équation du plan médiateur $\mathscr{P}'$ du segment $[AB]$.

Exercice 39.

Dans l'espace rapporté à un repère, notons $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x+3y-7z-14 = 0$ et $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -11 + 3t \\ z = 19 - 5t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Déterminez l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Correction de l'exercice 39

On substitue x, y et z par leurs expression en fonction de t dans l'équation cartésienne du plan : $2(-2 + t) + 3(-11 + 3t) - 7(19 - 5t) - 14 = 46t - 170$ donc $t = \frac{170}{46}$.

Exercice 40.

Dans un repère orthonormé on considère $A(3;-3;1)$, $B(2;-1;2)$ et $C(-1;1;-1)$.

1. Déterminez une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par C et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminez une équation du plan $\mathscr{Q}$ médiateur de $[AC]$.
3. Donnez une représentation paramétrique de l'intersection entre $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.
   Vous pourrez poser $z = t$ dans les deux équations précédentes.

Correction de l'exercice 40

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$
   $-x+2y+z+d=0$.
   C appartient au plan donc $-(-1)+2\times 1+(-1)+d=0$ donc $d=-2$.
   $-x+2y+z-2=0$.
2. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}$
   $-4x+4y-2z+d=0$.
   $I(1;-1;0)$.
   $-4-4+d=0$
   $-4x+4y-2z+8=0$.
3. Il faut choisir l'une des variables comme paramètre de la représentation paramétrique et résoudre le système.

$$\begin{cases}-x+2y+t-2=0\\-4x+4y-2t+8=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-x+2y=-t+2\\-4x+4y=2t-8\end{cases}$$

$-4y=6t-16$, $y=-\frac{3}{2}t+4$.
$-2x=4t-12$, $x=-2t+6$.

Exercice 41.

Démontrez que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives $2x+3y+z=0$ et $-x+2y-4z=0$ sont orthogonaux.

Correction de l'exercice 41

Les vecteurs normaux $\vec{n}_1\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}$ sont orthogonaux donc les plans sont orthogonaux.

3 Exercices.

Exercice 42.

Soient $A(1,0,3)$, $B(2,2,7)$ et $C(-1,5,4)$ trois points de l'espace rapporté à un repère et $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x+y-z+1=0$.

1. Démontrez que les points A, B et C définissent un plan.
2. Démontrez que $\mathscr{P}$ est le plan (ABC).
3. Déduisez-en un vecteur normal au plan (ABC).

Correction de l'exercice 42

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$.
   $\begin{vmatrix}1 & -2\\2 & 5\end{vmatrix} = 1\times 5 - 2\times(-2) = 9 \neq 0$.
   Donc vecteurs non nuls et non colinéaires A, B et Cdéfinissent bien un plan.
2. $2x_A + y_A - z_A + 1 = 2\times 1 + 0 - 3 + 1 = 0$ donc $A \in \mathscr{P}$. De même pour B et C.
3. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice 43.

Vérifiez que $3x - 2y + z = 2$ est une équation cartésienne du plan (ABC) où $A(1;1;1)$, $B(-1;-1;3)$ et $C(2;1;-2)$.

Correction de l'exercice 43

$$\begin{aligned}3\times 1 - 2\times 1 + 1 &= 2\\ 3\times(-1) - 2\times(-1) + 3 &= 2\\ 3\times 2 - 2\times 1 - 2 &= 2\end{aligned}$$

Exercice 44.

On donne les points suivants $A(-2,1,3)$ et $B(1,-2,2)$ et $C(4,1,-1)$.

1. Démontrez que les points A, B et C définissent un seul plan $\mathscr{P}$.
2. Déterminez une équation cartésienne d'un plan $\mathscr{P}'$ orthogonal à $\mathscr{P}$ passant par le point A.

Correction de l'exercice 44

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\0\\-4\end{pmatrix}$.

2. Il faut trouver un vecteur normal à $\mathscr{P}$. Supposons qu'il existe un tel vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et pour simplifier que $x=1$ (si cela ne conduit nul part nous choisirons $x=0$). On doit avoir $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. Autrement dit :
$$\begin{cases}3-3y+z=0\\6-4z=0\end{cases}$$
$z=\frac{3}{2}$ puis $y=\frac{1}{2}$.
Ainsi $2\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{P}$.
Clairement $\vec{m}\begin{pmatrix}1/2\\-1/3\\0\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{n}$. D'où une équation d'un plan orthogonal : $3x-2y+d=0$ et enfin $d=8$.

Exercice 45.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal on considère les points $A(2,3,3)$, $B(-1,17,-17)$ et un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Démontrez que $H(-9,5,-1)$ appartient à $\mathscr{P}$.
2. Démontrez que H est le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{P}$ et déduisez-en la distance de B à $\mathscr{P}$.
3. Soit $C(5,11,-5)$. Justifiez que C est le projeté orthogonal de H sur (BC) puis calculez la distance de H à (BC).

Correction de l'exercice 45

1. $H\in\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}=0$.
$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-11\\2\\-4\end{pmatrix}$.

2. Puisque $H\in\mathscr{P}$, H est le projet orthogonal de B sur $\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{BH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-8\\-12\\16\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}=-4\vec{n}$.

Repère orthonormal donc $BH = ||\overrightarrow{BH}|| = 4\sqrt{29}$.

3. C est le projeté orthogonal de H sur (BC) si et seulement $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

$\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix} -14 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Repère orthonormal donc $HC = ||\overrightarrow{HC}|| = 2\sqrt{62}$.

Exercice 46.

Soient $A(8, 10, 5)$ un point et $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x + 3y - z + 1 = 0$ dans l'espace muni d'un repère. Déterminez les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

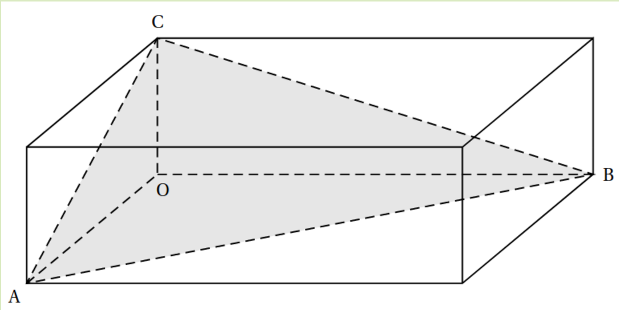
Exercice 47.

Soient $A(1; 0; -2)$, $B(0; 3; -1)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(0; -1; 0)$ et $S\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; 4\right)$ des points de l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. Démontrez que $ABCD$ est un rectangle.
2. (a) Montrez que si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) alors, pour tout point M du plan (ABC), on a $SH = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{n}|}{||\overrightarrow{n}||}$, où H est le projeté orthogonal de S sur le plan ABC.
   (b) Déterminez les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan (ABC).
   (c) En déduire la hauteur SH de la pyramide $SABCD$.
3. Calculez le volume de la pyramide $SABCD$.

Exercice 48.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points : A de coordonnées $(2\,;0\,;0)$, B de coordonnées $(0\,;3\,;0)$ et C de coordonnées $(0\,;0\,;1)$.



L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.

2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

   (b) Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{12}{49}\,;\,\frac{36}{49}\right)$.

   (c) Calculer la distance OH.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.
   En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

Correction de l'exercice 48

1. (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

   On a bien $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$.

(b) $3x + 2y + 6z + d = 0$ puis $d = -6$.
On peut aussi simplement vérifier que les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation cartésienne proposée.

2. (a) d est dirigée par $\vec{n}$ et passe par O donc

$$d : \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 3t \\ y & = & 2t \\ z & = & 6t \end{array} \right. , \ t \in \mathbb{R}$$

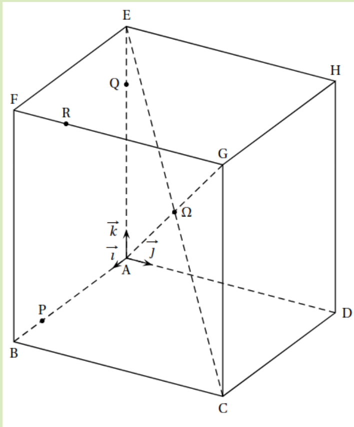
(b) Pour $t = \frac{6}{49}$ on obtient les coordonnées de H avec la représentation paramétrique.
En injectant dans l'équation cartésienne les coordonnées de H on vérifie que H appartient aussi au plan.
Ainsi $H \in d \cap (ABC)$.

(c) Le repère étant orthonormé $OH = \frac{1}{49} \times 42$.

3. $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} OA \times OB \times OC = 1$.
Or $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A} \times OH$ donc $\mathcal{A} = \frac{3\mathcal{V}}{OH} = \frac{147}{42}$

Exercice 49.

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 8 cm et de centre Ω. Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$. On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ; \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ avec : $\vec{\imath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.



Partie I

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont $(8\,;\,2\,;\,8)$. Donner les coordonnées des points P et Q.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1\ ;\ -5\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan (PQR).
3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x - 5y + z - 6 = 0$.

Partie II

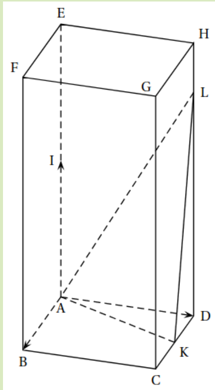
On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

1. Justifier que les coordonnées du point Ω sont $(4\,;\,4\,;\,4)$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω.
3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{14}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{14}{3}\right)$
4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR).

Exercice 50.

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que AB = AD = 1 et AE = 2, représenté ci- dessous.
Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AI}\right)$.
On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0\ ;\ 1\ ;\ \frac{3}{2}\right)$.



1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.
2. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(6\ ;\ -3\ ;\ 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).
   (c) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).
   (d) En déduire que le point N de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\ ;\ \frac{40}{49}\ ;\ \frac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

3. (a) Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.
   (b) Calculer la distance du point D au plan (AKL).
   (c) Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

Correction de l'exercice 50

1. $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.
2. (a) $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$ forment une base de (AKL). Avec les coordonnées : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AK} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{AL} = 0$. Donc $\vec{n}$ est normal à (AKL).

(b) $\overrightarrow{n}$ est normal à (AKL) donc une équation cartésienne de la forme $6x - 3y + 2z + d = 0$. De $A \in (AKL)$ on déduit $d = 0$. $(AKL):\ 6x - 3y + 2z = 0$.

(c) Δ perpendiculaire à (AKL) et $\overrightarrow{n}$ orthogonal à (AKL) donc $\overrightarrow{n}$ est vecteur directeur de Δ.

Δ passe ar D et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ donc

$$\Delta : \begin{cases} x = 6t \\ y = -3t + 1 \\ z = 2t \end{cases}$$

(d) $N\left(3 \times \frac{3}{49}; -3 \times \frac{3}{49} + 1; 2 \times \frac{3}{49}\right)$ donc $N \in \Delta$.
$6x_N - 3y_N + 2z_N = 0$ donc $N \in (AKL)$.
Comme $D \in \Delta$, $N \in \Delta \cap (AKL)$ et Δ perpendiculaire à (AKL), N est le projeté orthogonal de D sur (AKL).

3. (a) $\mathscr{V} = \frac{1}{8}$.

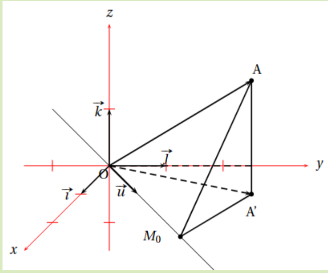
(b) $d((AKL); D) = DN = \left\|\overrightarrow{DN}\right\| = \sqrt{x^2_{\overrightarrow{DN}} + y^2_{\overrightarrow{DN}} + z^2_{\overrightarrow{DN}}} = \frac{21}{7}$.

(c) $\mathscr{A} = 3 \times \frac{1}{ND}\mathscr{V} = \frac{1}{8}$.

Exercice 51.

Dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on considère

- le point A de coordonnées $(1\,;3\,;2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.



Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.
On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\ ;\ t\ ;\ 0)$.
   (a) On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :
   $$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$
   (b) Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\ ;\ 2\ ;\ 0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale.
   On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.
3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.
4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\ ;\ 3\ ;\ 0)$.
   Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.
5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.
   On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire
   d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

Exercice 52.

— Baccalauréat S Amérique du Nord 30 mai 2013. Exercice 1.
— Baccalauréat S Liban 28 mai 2013. Exercice1 qCM.