09 Convexité, dérivée seconde.

I Définition.

II Caractérisations pour les fonctions une fois dérivables.

III Caractérisation pour les fonctions deux fois dérivables.

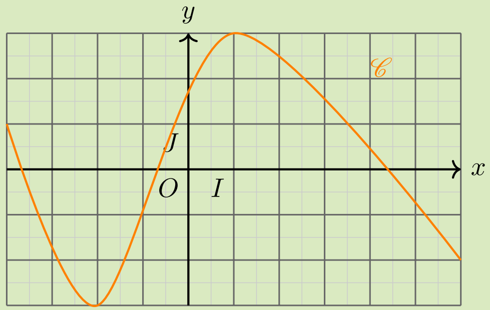
IV Inégalités.

V Exercices.

Exercice 1.

Décrivez la convexité de la fonction f si

1. la courbe représentative ci-dessous est celle de f.
2. la courbe représentative ci-dessous est celle de f'.
3. la courbe représentative ci-dessous est celle de f''.



Exercice 2.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x + 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminez la convexité de f.
2. Déterminez une équation de la tangente au point d'abscisse 0.
3. Déduisez-en que pour tout réel x appartenant à $[-2, +\infty[$, $f(x) \geqslant x + 1$.
4. Retrouvez le précédent résultat en résolvant l'inéquation $f(x) \geqslant x + 1$.

Exercice 3. C

Étudiez la convexité de la fonction

1. $f : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 4. C

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+9}$. Nous admettons que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est paire.
2. Étudiez le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.
3. Étudiez la limite de f en $+\infty$.
4. Déduisez des questions précédentes le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminez l'équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.
6. (a) Vérifiez que pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$.

   (b) Déduisez-en les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

Exercice 5.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6$.

1. Montrez que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminez une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 1.
3. Déduisez-en que pour tout réel x : $x^6 + 3x^2 + 6 \geqslant 12x - 2$

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{4}{x+5} \leqslant \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{5}$.
2. Déterminez une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 et déduisez-en que, pour tout nombre réel x strictement positif, $\frac{1}{x} \geqslant -\frac{x}{4} + 1$.

Exercice 7.

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^3$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(x+1)^3 \leqslant 4x^3 + 4$.
2. Déterminez une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 et déduisez-en que, pour tout nombre réel x positif, $x^3 \geqslant 3x - 2$.
3. h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 5.$$

   En utilisant l'inégalité précédente, montrez que la fonction h est croissante sur $[0, +\infty[$.

Exercice 8.

On appelle « satisfaction » toute fonction dérivable qui prend des valeurs comprises entre 0 et 100.
Lorsque la fonction « satisfaction » atteint 100 on dit qu'il y a « saturation ».
On définit aussi la fonction « envie » comme la fonction dérivée de la fonction « satisfaction ».
La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction satisfaction h est définie sur $[10;50]$ par :

$$h(x) = \frac{90}{1+\mathrm{e}^{-0,25x+6}};$$

où x est exprimé en milliers d'euros.
On note $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de la fonction h.

1. Par lecture graphique sur votre calculatrice conjecturez la convexité de la fonction h ainsi que le sens de variation de la fonction « envie ». Donnez-en une interprétation.
2. D'après ce modèle serait-il possible d'atteindre la saturation ?
3. Vérifiez que pour tout $x \in [10;50]$:

$$h''(x) = \frac{5,625\mathrm{e}^{-0,25x+6}\left(\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6}\right)^3}.$$

4. Déduisez-en la convexité de la fonction h.
5. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « envie » décroît ?

Exercice 9.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

Le plan est ramené à un repère orthogonal.
On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''.

1. Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.
2. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point d'abscisse 4.
3. Donner avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_1$.

Exercice 9. (suite)

Partie B

Soit un réel k strictement positif.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{4}{1 + \mathrm{e}^{-kx}}.$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$,
2. Prouver que $g'(0) = k$.
3. En admettant le résultat ci-dessous obtenu avec un logiciel de calcul formel, prouver que la courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

▷ Calcul formel	
1	g(x) =4/(1 + e^(-kx)) $\rightarrow g(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^{-kx} + 1}$
2	Simplifier($g''(x)$) $\rightarrow g''(x) = -4\mathrm{e}^{kx}\left(\mathrm{e}^{kx} - 1\right)\dfrac{k^2}{\left(\mathrm{e}^{kx} + 1\right)^3}$

Exercice 10.

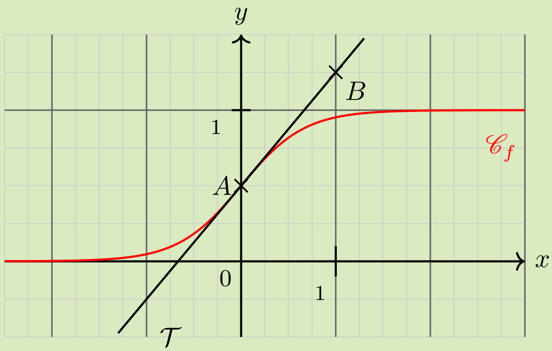
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-3x}}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On nomme A le point de coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\ ;\ \dfrac{5}{4}\right)$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.



Partie A : lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Exercice 10. (suite)

Partie B : étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
2. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.
   (b) Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f.
4. *Question infaisable sans la fonction logarithme népérien.* Déterminer la valeur exacte de la solution α de l'équation $f(x) = 0,99$.

Partie C : Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.
On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x} - 1\right)}{\left(1 + \mathrm{e}^{-3x}\right)^3}.$$

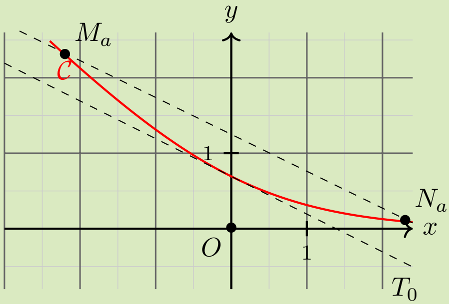
2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.
   (b) Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
   (c) En déduire la position relative de la tangente $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$. Justifier la réponse.

Exercice 11.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous.



1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   (b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
   (c) On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{-1}{1+\mathrm{e}^{x}}$.
   (d) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. On note T_0 la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.
   (a) Déterminer une équation de la tangente T_0.
   (b) Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire que, pour tout nombre réel x, on a :

$$f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x + \ln(2).$$

3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives $-a$ et a.
   On a donc : $M_a\,(-a\ ;\ f(-a))$ et $N_a\,(a\ ;\ f(a))$.
   (a) Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) - f(-x) = -x$.
   (b) En déduire que les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles.