08 Fonction logarithme népérien.

I Bijection.

1 L'aspect géométrique.

2 Théorème de la bijection.

II Logarithme népérien, propriétés algébriques.

1 Définition.

Exercice 1.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $2e^{x} - 3 = 0$.

b) $e^{-x+1} - 1 = 0$.

c) $e^{2x} = 4$.

d) $\left(2e^{x} - 1\right)\left(e^{x} + 5\right) = 0$.

e) $-5e^{x} - 10 = 0$.

f) $7 - e^{5x-2} = 0$.

g) $e^{-3x} - 1 = 0$.

h) $e^{x}\left(e^{x} - 9\right) = 0$.

i) $e^{2x} + 3e^{x} = 0$.

Exercice 2.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\ln(x) = 3$.

b) $\ln(x) = -7$.

c) $2\ln(x) - 1 = 0$.

d) $(\ln(x) + 5)(4\ln(x) - 5) = 0$.

e) $(\ln(x))^2 = 9$.

f) $\ln(x) = -5$.

g) $-6\ln(x) + 3 = 0$.

h) $\ln(x)(2\ln(x) - 7) = 0$.

i) $(\ln(x))^2 - \ln(x) = 0$.

j) $(\ln(x))^3 - 2(\ln(x))^2 = 0$.

Exercice 3.

Déterminez l'ensemble (le domaine) de définition de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) $f(x) = \ln(x+1)$.

c) $f(x) = \ln\left(\frac{3x-1}{4x+11}\right)$.

d) $f(x) = \ln\left(\frac{2}{3}x + \frac{9}{7}\right)$.

e) $f(x) = \ln(x^2)$.

f) $f(x) = \ln\left((x-2)(3x-4)\right)$.

g) $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$.

h) $f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 1)$.

i) $f(x) = \ln(x+1) + \ln(x^2 - 4)$.

2 Propriétés algébriques.

Exercice 4.

Simplifiez les nombres suivants pour les écrire en fonction de $\ln(3)$ uniquement.

a) $\ln(9)$.

b) $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

c) $\ln\left(3\sqrt{3}\right)$.

d) $\ln(36) - 2\ln(2)$.

Exercice 5.

Simplifiez les nombres suivants pour les écrire en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$ uniquement.

a) $\ln(10) - \ln\left(\frac{1}{4}\right)$.

b) $\ln(0,05)$.

c) $\ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

d) $2\ln\left(5\mathrm{e}^2\right) + \ln\left(4\mathrm{e}^{-1}\right)$.

Exercice 6.

Simplifiez les expressions suivantes.

a) $A = \ln\left(\mathrm{e}^4\right) + 3\ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right)$.

b) $B = \mathrm{e}^{2\ln(5)} - \ln\left(\left(\mathrm{e}^5\right)^2\right)$.

c) $C = \ln\left(\mathrm{e}^{-3}\right) \times \ln\left(\mathrm{e}^3\right)$.

d) $D = 20\ln\left(\sqrt{e}\right) - \mathrm{e}^{3\ln(3)}$.

3 Exercices.

Exercice 7.

Déterminez la valeur exacte de $S = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{49}{50}\right)$.

Exercice 8.

Démontrez que

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) = -x + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{x}\right)$.

b) $\forall x > -1,\ 2\ln(x+1) = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2x}\right) = -2x + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{2x}\right)$.

Exercice 9.

Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \ln(3x - 7)$.

b) $g(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$.

c) $h(x) = \ln(x) - 3\ln(2 - x)$.

Exercice 10.

Résolvez les équation suivantes après avoir déterminé l'ensemble sur lequel on peut les résoudre.

a) $\ln(x) = \ln(x + 2)$.

b) $\ln(-x + 3) = \ln(3x + 5)$.

c) $\ln(2x^2 + 4) = \ln(-5x + 1)$.

d) $\ln(x^2) = \ln(x) + \ln(6)$.

e) $\ln(x + 1) + \ln(x - 4) = \ln(5)$.

f) $2\ln(x) = \ln(5x - 3)$.

g) $\ln[(x - 3)(2x + 1)] = \ln(4)$.

h) $\ln(x - 3) + \ln(2x + 1) = 3\ln(2)$.

Exercice 11.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $[\ln(x)]^2 - 2\ln(x) - 3 = 0$.

b) $4[\ln(x)]^2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 3 = 0$.

c) $4\mathrm{e}^{2x} + 7\mathrm{e}^{x} - 2 = 0$.

d) $\ln(-x) = \ln\left(x^2 - 1\right)$.

e) $\ln\left(2 - \mathrm{e}^{x}\right) - \ln\left(2\mathrm{e}^{x} - 1\right) = 0$.

f) $\ln(4) + \ln(x - 1) = 2\ln(x)$.

g) $\left(2x^2 + 3x - 6\right)\ln(1 - x) = 0$.

h) $\ln\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right) + \ln\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right) = 1 + \ln(2)$.

i) $\ln(x + 1) - \ln(x) = 2\ln(3)$.

III Logarithme népérien, variation de la fonction.

1 Monotonie.

Exercice 12.

Résolvez les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $\ln(x) < 3$.

b) $2\ln(x) + 200 > 0$.

c) $1 - 2\ln(x) \geqslant 0$.

d) $2\ln(x) - 4\ln(3) < 0$.

Exercice 13.

L'évolution d'une population d'animaux en fonction du temps est modélisée par la fonction P définie par $P(t) = 50\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$, où t est exprimé en années.

1. Au bout de combien d'années la population initiale aura-t-elle été multipliée par 2 ?
2. Au bout de combien d'année la population dépassera-t-elle les 10 000 individus ?

Exercice 14.

Déterminez le plus petit entier naturel n tel que

a) $0,99^n \leqslant 10^{-30}$.

b) $1,02^n > 10^{2024}$.

Exercice 15.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 1,001$. Déterminez s'il existe un plus petit entier naturel n tel que $u_n > 100\,000$.

Exercice 16.

Résolvez les inéquations suivantes après avoir déterminé sur quel ensemble on peut le résoudre.

a) $\ln(3x - 4) < 0$.

b) $\ln(-x + 3) \geqslant 1$.

c) $\ln(-x + 1)\ln(x)$.

d) $\ln(3 + 2x) < \ln(x - 3)$.

2 Signe.

Exercice 17.

Résolvez les inéquations suivantes.

a) $\ln(x+1) > 0$.

b) $\dfrac{\ln(x)-1}{x^2+1} > 0$.

c) $\dfrac{\ln(x)}{x^2-3x+2} > 0$.

d) $[\ln(x)]^2 - 5\ln(x) + 4 < 0$.

3 Régularité.

4 Convexité.

5 Limites.

Exercice 18.

Déterminez la limite en a des fonctions f et g suivantes.

a) $f(x) = 2[\ln(x)]^2 + 3\ln(x) + 1$ avec $a = +\infty$.

b) $g(x) = -[\ln(x)]^2 + \ln(x)$ avec $a = 0$.

6 Fonctions composées avec $\ln$.

7 Croissances comparées.

Exercice 19.

Déterminez la limite en a des fonctions f et g suivantes définies sur $]0;+\infty[$.

1. $f(x) = \left(\mathrm{e}^x - 1\right)(1-\ln(x))$ avec $a = +\infty$.
2. $g(x) = \dfrac{\ln(x)-1}{x}$ avec $a = 0$.

Exercice 20.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x+1}$.

1. Déterminez la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
2. (a) Vérifiez que pour tout réel $x > 0$: $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{2+\frac{1}{x}}$.

   (b) Déduisez-en la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. interprétez graphiquement les résultats précédents.

Exercice 21.

a et b étant deux nombres réels donnés, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = a + b\frac{\ln(x)}{x}$.
Sachant que $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$ et une tangente $\mathscr{T}$ au point d'abscisse 1 d'équation $y = -x + 2$, déterminez les valeurs de a et b.

8 Exercices.

Exercice 22.

Exercice 23.

Déterminez les limites de f au bornes de son domaine de définition $\mathscr{D}$.

a) $f(x) = \ln(3x-1)$ et $E = \left]\frac{1}{3},+\infty\right[$.

b) $f(x) = \ln(-x^2+4x)$ et $E =]0;4[$.

c) $f(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$ et $E = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = x\ln(5x)$ et $E =]0;+\infty[$.

e) $f(x) = \ln\left(x+\mathrm{e}^{-x}\right)$ et $E = \mathbb{R}$.

Exercice 24.

Soient f la fonction définie sur $]-2;2[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Justifiez que f est définie sur $]-2;2[$.
2. Montrez que f est impaire puis interprétez graphiquement ce résultat.
3. Démontrez que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes que vous préciserez.
4. Étudiez le sens de variation de f puis donnez son tableau de variation.

Exercice 25.

Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \ln(2x-1) - x + 1$.

1. Déterminez la limite de $f(x)$ en $\frac{1}{2}$.
2. Montrez que pour tout réel $x > \frac{1}{2}$: $f(x) = \ln(x) - x + 1 + \ln\left(2-\frac{1}{x}\right)$.
Déduisez-en la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes α et β $(\alpha < \beta)$.
4. Donnez la valeur exacte de α et un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 26.

Dans une pièce à la température constante de 20°C on prépare un tasse de thé. À l'instant initial $t = 0$ la température du thé est égale à 100°C. Quatre minutes plus tard elle est de 80°C.
On admet que la température du thé $f(t)$ en °C, est donnée par $f(t) = C\mathrm{e}^{at} + 20$ où t désigne le temps en minute et a et C sont des constantes réelles.
Au-dessus de 50°C le thé est trop chaud et on ne peut le boire.
Combien de temps faudra-t-il attendre pour boire le thé ?

Exercice 27.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1 + \ln(x)}{x^2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculez la limite de f en 0.
   (b) Déterminez la limite de f en $+\infty$. Donnez-en un interprétation graphique.
2. (a) Montrez que pour tout réel $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}$.
   (b) Déduisez-en les variations de f sur $]0, +\infty[$
3. (a) Montrez que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses dont vous préciserez les coordonnées.
   (b) Déduisez-en, le signe de f sur $]0, +\infty[$.

Exercice 28.

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$. Montrez que la fonction g est positive sur $[1, +\infty[$.
2. (a) Montrez que, pour tout x de $[1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
   (b) Déduisez-en le sens de variation de f sur $[1, +\infty[$.
3. On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Étudiez la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
4. Pour tout entier naturel k supérieur ou égale à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.
   (a) Déterminez la limite de M_kN_k lorsque k tend vers $+\infty$.
   (b) Écrivez un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier k_0 supérieur ou égale à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

Exercice 29.

Exercice 30.

Identifier parmi les suites dont le terme général est donné ci-après, les situations conduisant à une forme indéterminée lors de l'étude de la convergence, sinon donnez la limite.

On peut schématiquement résumer les formes indéterminées par :

$$(+\infty)-(+\infty),\quad (-\infty)-(-\infty),\quad 0\times\infty,\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \frac{}{0^?}.$$

a) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2^n}$.

b) n^2-6^n.

c) $\ln(n^{-1})+n!$.

d) $2^{-n}+\ln(n)$.

e) $n^{12}+\dfrac{1}{n^{100}}$.

f) $\dfrac{1}{\ln(n)}+n!+1$.

g) $n^2 3^n$.

h) $\dfrac{n^2}{n^{12}}$.

i) $\dfrac{n!}{2^n}$.

j) $n^{-2}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$.

k) $\dfrac{n^{-3}}{\ln(n)}$.

l) $n^5 2^{-n}$.

m) $n^{-3}+0,5^n\ln(n)$.

n) $\dfrac{1}{n^4}\times \mathrm{e}^n+4$.

o) $\dfrac{\ln(n)}{\mathrm{e}^n}$.

Exercice 31.

Déterminez, si possible la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

a) $n^7 + 12.$

b) $4^n - 7.$

c) $n^3 + \dfrac{0,1^n}{\ln(n)}.$

d) $\dfrac{1}{n} + 4.$

e) $n^{-4} + \ln(n).$

f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2 + \dfrac{1}{n^2}.$

g) $n!n^2 + 2 - \dfrac{1}{n^2}.$

h) $\dfrac{\ln(n)}{2 + \mathrm{e}^{-n}}.$

i) $\dfrac{n^4 + 1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 4}.$

j) $\dfrac{n \times 2^n}{3 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}.$

k) $n! - \left(2 - n^2\right).$

l) $n^2\left(n^3 + \dfrac{3}{\ln(n)} + 1\right).$

m) $2n^3 + 5n^2 + n - 12.$

n) $-5n^3 - 2n^2 - 12n - 3.$

o) $4n^2 - n + 1.$

p) $\dfrac{n^3}{n^2}.$

q) $n^2 + 3^n + 4 - \dfrac{1}{n}.$