08 Fonction logarithme népérien.

I Bijection.

Définition 1

Soient :

. E et F des ensembles de nombres réels non vides,

. $f : E \to F$ une application.

Nous dirons que *f réalise une bijection de E sur F* si et seulement si tout élément de F est l'image d'un unique élément de E.

Exemples.

Les exemples qui suivent ne sont pas démontrés ils relèvent de la lecture intuitive des courbes représentatives. Pour un résultat démontrant l'existence d'une bijection *confer infra*.

1. Carré n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$.
2. Racine carrée réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. La restriction de carré réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. Les fonctions trigonométriques ne sont pas des bijections sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Une fonction affine.

Proposition 1

Soient :

. E et F des ensembles de nombres réels non vides,

. $f : E \to F$ une application.

Si f réalise une bijection de E sur F alors il existe une fonction notée f^{-1} et appelée *réciproque* de f telle que, si $f(x) = y$ alors $f^{-1}(y) = x$.

Exemples.

1. Fonction affine : si $f(x) = 2x + 1$ alors $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$.

Remarques.

1. Une propriété caractéristique de la fonction réciproque : $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$.
2. Les $\cos^{-1}$ et autres de la calculatrice.
3. Si une fonction admet une réciproque alors elle est une bijection.

Théorème 1

Soient :

. E et F des ensembles de nombres réels non vides,

. $f : E \to F$ une application et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

f réalise une bijection de E sur F si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la première bissectrice, *i.e.* la droite d'équation $y = x$.

1 L'aspect géométrique.

2 Théorème de la bijection.

Théorème 2

Soient :

. E et F des ensembles de nombres réels non vides,

. $f : E \to F$ une application.

Si f est continue et strictement monotone sur E alors f réalise une bijection de E sur $f(E)$.

Démonstration

Découle du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans le cas d'une fonction continue et strictement monotone.

■

Exemples.

1. Les fonctions affines non constantes réalisent des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Cube et sa réciproque.

Corollaire 1

La fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

II Logarithme népérien, propriétés algébriques.

1 Définition.

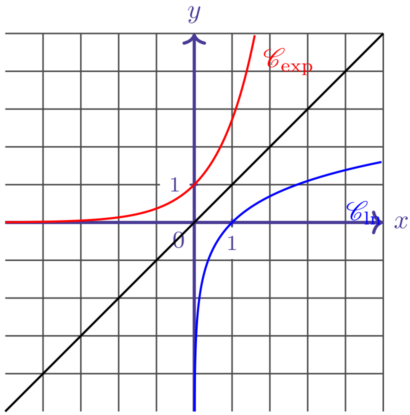
Nous avons établi avec le théorème de la bijection que exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 2

On appelle *logarithme népérien* et on note ln l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui est la réciproque de la fonction exponentielle.

Remarques.

1. Si $\exp : x \mapsto y$ alors la fonction qui fera le lien réciproque $y \mapsto x$ a sa courbe représentative symétrique par rapport à la première bissectrice de celle exp.



2. Ainsi ln est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à chaque $x \in]0,+\infty[$ associe l'unique nombre réel y tel que $x = \mathrm{e}^y$.
3. Nous retiendrons que par définition de ln :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^{\ln(x)} = x.$$

   et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x.$$

4. En utilisant la loi de composition des fonctions le précédent résultat devient : $\ln \circ \exp(x) = x$ et $\exp \circ \ln(x) = x$.
5. $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

Exemples.

1. $\mathrm{e}^x = 1 \Longleftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^x\right) = \ln(1) \Longleftrightarrow x = 0$.
2. $\mathrm{e}^x = 14 \Longleftrightarrow x = \ln(14)$.

Exercice 1.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $2\mathrm{e}^x - 3 = 0$.

b) $\mathrm{e}^{-x+1} - 1 = 0$.

c) $\mathrm{e}^{2x} = 4$.

d) $\left(2\mathrm{e}^x - 1\right)\left(\mathrm{e}^x + 5\right) = 0$.

e) $-5\mathrm{e}^x - 10 = 0$.

f) $7 - \mathrm{e}^{5x-2} = 0$.

g) $\mathrm{e}^{-3x} - 1 = 0$.

h) $\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 9\right) = 0$.

i) $\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^x = 0$.

Exercice 2.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\ln(x) = 3$.

b) $\ln(x) = -7$.

c) $2\ln(x) - 1 = 0$.

d) $(\ln(x) + 5)(4\ln(x) - 5) = 0$.

e) $(\ln(x))^2 = 9$.

f) $\ln(x) = -5$.

g) $-6\ln(x) + 3 = 0$.

h) $\ln(x)(2\ln(x) - 7) = 0$.

i) $(\ln(x))^2 - \ln(x) = 0$.

j) $(\ln(x))^3 - 2(\ln(x))^2 = 0$.

Exercice 3.

Déterminez l'ensemble (le domaine) de définition de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) $f(x) = \ln(x+1)$.

c) $f(x) = \ln\left(\frac{3x-1}{4x+11}\right)$.

d) $f(x) = \ln\left(\frac{2}{3}x + \frac{9}{7}\right)$.

e) $f(x) = \ln(x^2)$.

f) $f(x) = \ln((x-2)(3x-4))$.

g) $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$.

h) $f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 1)$.

i) $f(x) = \ln(x+1) + \ln(x^2 - 4)$.

Correction de l'exercice 3

a) $\mathbb{R}_+^*$.
b) $]-1,+\infty[$.
c) $\left]-\infty,-\frac{11}{4}\right[\cup\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$.
d) $\left]-\frac{27}{14},+\infty\right[$.
e) $\mathbb{R}^*$.
f) $\left]-\infty,\frac{4}{2}\right[\cup\,]2,+\infty[$.
g) $\mathbb{R}_+^*$.
h) $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\cup\,]1,+\infty[$.
i) $]-1,+\infty[\cap(]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[)=]2,+\infty[$.

2 Propriétés algébriques.

Proposition 2

Soient $(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $n\in\mathbb{N}$.
(i) $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$.
(ii) $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln(a)$.
(iii) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$.
(iv) $\ln\left(a^n\right)=n\ln(a)$.
(v) $\ln(a^{-n})=-n\ln(a)$.
(vi) $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln(a)$.

Démonstration

(i) D'une part

$$\exp\left(\ln(ab)\right)=ab,$$

d'autre part

$$\begin{aligned}\exp\left(\ln(a)+\ln(b)\right)&=\exp\left(\ln(a)\right)\times\exp\left(\ln(b)\right)\\&=ab\end{aligned}$$

donc $\exp\left(\ln(ab)\right)=\exp\left(\ln(a)+\ln(b)\right)$.
En composant par ln ou en utilisant les résultats vus en première : $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$.

(ii) $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(1) = 0$.

(iii) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

(iv) Par récurrence.

(v) D'après (ii) et (iv).

(vi) $\ln(a) = \ln\left(\sqrt{a}^2\right) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$.

■

Exercice 4.

Simplifiez les nombres suivants pour les écrire en fonction de $\ln(3)$ uniquement.

a) $\ln(9)$.

b) $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

c) $\ln\left(3\sqrt{3}\right)$.

d) $\ln(36) - 2\ln(2)$.

Exercice 5.

Simplifiez les nombres suivants pour les écrire en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$ uniquement.

a) $\ln(10) - \ln\left(\frac{1}{4}\right)$.

b) $\ln(0,05)$.

c) $\ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

d) $2\ln\left(5\mathrm{e}^2\right) + \ln\left(4\mathrm{e}^{-1}\right)$.

Exercice 6.

Simplifiez les expressions suivantes.

a) $A = \ln\left(\mathrm{e}^4\right) + 3\ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right)$.

b) $B = \mathrm{e}^{2\ln(5)} - \ln\left(\left(\mathrm{e}^5\right)^2\right)$.

c) $C = \ln\left(\mathrm{e}^{-3}\right) \times \ln\left(\mathrm{e}^3\right)$.

d) $D = 20\ln\left(\sqrt{e}\right) - \mathrm{e}^{3\ln(3)}$.

3 Exercices.

Exercice 7.

Déterminez la valeur exacte de $S = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{49}{50}\right)$.

Exercice 8.

Démontrez que

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = -x + \ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)$.

b) $\forall x > -1,\ 2\ln(x+1) = \ln(x^2+2x+1)$.

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right) = -2x + \ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)$.

Exercice 9.

Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \ln(3x-7)$.

b) $g(x) = \ln(-x^2+4x-3)$.

c) $h(x) = \ln(x) - 3\ln(2-x)$.

Exercice 10.

Résolvez les équations suivantes après avoir déterminé l'ensemble sur lequel on peut les résoudre.

a) $\ln(x) = \ln(x+2)$.

b) $\ln(-x+3) = \ln(3x+5)$.

c) $\ln(2x^2+4) = \ln(-5x+1)$.

d) $\ln(x^2) = \ln(x) + \ln(6)$.

e) $\ln(x+1) + \ln(x-4) = \ln(5)$.

f) $2\ln(x) = \ln(5x-3)$.

g) $\ln\left[(x-3)(2x+1)\right] = \ln(4)$.

h) $\ln(x-3) + \ln(2x+1) = 3\ln(2)$.

<u>Correction de l'exercice 10</u>

a) $\mathbb{R}_+^*$ et $\varnothing$.

b) $\left]-\frac{5}{3}, 3\right[$ et $-\frac{1}{2}$.

c) $\left]-\infty, \frac{1}{5}\right[$ et $\left\{1, \frac{3}{2}\right\}$.

d) $\mathbb{R}_+^*$ et 6.

e) $]4, +\infty[$ et $\left\{\frac{21}{4}\right\}$.

f) $\left]\frac{3}{5}, +\infty\right[$ et $\left\{1, \frac{3}{2}\right\}$.

g) $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup]3, +\infty[$ et $\left\{-1, \frac{7}{2}\right\}$.

h) $]3, +\infty[$ et $\left\{\frac{5+\sqrt{113}}{4}, \frac{5-\sqrt{113}}{4}\right\}$.

Exercice 11.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $[\ln(x)]^2 - 2\ln(x) - 3 = 0.$

b) $4[\ln(x)]^2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 3 = 0.$

c) $4e^{2x} + 7e^x - 2 = 0.$

d) $\ln(-x) = \ln\left(x^2 - 1\right).$

e) $\ln\left(2 - e^x\right) - \ln\left(2e^x - 1\right) = 0.$

f) $\ln(4) + \ln(x-1) = 2\ln(x).$

g) $\left(2x^2 + 3x - 6\right)\ln(1-x) = 0.$

h) $\ln\left(e^x - 1\right) + \ln\left(e^x + 1\right) = 1 + \ln(2).$

i) $\ln(x+1) - \ln(x) = 2\ln(3).$

Correction de l'exercice 11

a) $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(x) \in \{-1; 3\}$ donc $x = e^3$.

b) $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(x) \in \{-1; \frac{3}{4}\}$ donc $x = e^{\frac{3}{4}}$.

c) $\mathbb{R}$ et $e^x \in \left\{2; \frac{1}{4}\right\}$ donc $x \in \left\{\ln(2), \ln\left(\frac{1}{4}\right)\right\}$.

d) $x \in \mathbb{R}_- \cap (]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[) =]-\infty, -1[$ et $x \in \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ pas de solution.

e) $x \in]\ln\left(\frac{1}{2}\right), \ln(2)[$ et $x = 0$.

f) $x \in]1, +\infty[$, $x^2 - 4x + 4$ et $x \in \{2\}$.

g) $x \in]-\infty, 1[$, et $c \in \{0; 1; -3\}$.

h)

III Logarithme népérien, variation de la fonction.

Pour que cette leçon ait du sens il faut se souvenir que nous avons uniquement la courbe représentative de ln comme réciproque de exp. Nous allons vérifier certaines propriétés qui semblent claires graphiquement.

L'objectif est ici de faire e ln une fonction de référence dont les propriétés pourront être utilisées pour étudier d'autres fonctions.

1 Monotonie.

Proposition 3

ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration

Démontrons que ln est strictement croissante.

Soit $(y_1, y_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $y_1 < y_2$.
Notons $x_1 = \ln(y_1)$ et $x_2 = \ln(y_2)$.
Raisonnons par l'absurde en supposant $x_1 \geqslant x_2$.
Alors la fonction exponentielle étant strictement croissante :

$$e^{x_1} \geqslant e^{x_2}.$$

Autrement dit :

$$y_1 \geqslant y_2.$$

Ce qui est impossible puisque nous avions choisi : $y_1 < y_2$. Donc, nécessairement, $x_1 < x_2$.

Nous avons démontré que

$$\forall (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ x_1 < x_2 \Rightarrow \ln(x_1) < \ln(x_2).$$

Autrement dit

$$\boxed{\text{ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*. \ .}$$

■

Exemples.

1. $e^x > 2 \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(2) \Leftrightarrow x > \ln(2) \Leftrightarrow x \in]\ln(2), +\infty[$.
2. À partir de quel entier naturel a-t-on $5^n \geqslant 10^9$.

2 Signe.

Proposition 4

x	0		1		$+\infty$
ln	‖	$-$	0	$+$	

Démonstration

* Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} \ln(x) > 0 &\Leftrightarrow \exp \circ \ln(x) > \exp(0) \\ &\Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

* De même, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) = 0 \iff x = 1$.

■

Exemples.

1. À partir de quel entier naturel a-t-on $0,5^n \geqslant 10^{-9}$.

Exercice 12.

Résolvez les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $\ln(x) < 3$.

b) $2\ln(x) + 200 > 0$.

c) $1 - 2\ln(x) \geqslant 0$.

d) $2\ln(x) - 4\ln(3) < 0$.

Exercice 13.

L'évolution d'une population d'animaux en fonction du temps est modélisée par la fonction P définie par $P(t) = 50\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$, où t est exprimé en années.

1. Au bout de combien d'années la population initiale aura-t-elle été multipliée par 2 ?
2. Au bout de combien d'année la population dépassera-t-elle les 10 000 individus ?

Exercice 14.

Déterminez le plus petit entier naturel n tel que

a) $0,99^n \leqslant 10^{-30}$.

b) $1,02^n > 10^{2024}$.

Exercice 15.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 1,001$. Déterminez s'il existe un plus petit entier naturel n tel que $u_n > 100\,000$.

Exercice 16.

Résolvez les inéquations suivantes après avoir déterminé sur quel ensemble on peut le résoudre.

a) $\ln(3x - 4) < 0$.

b) $\ln(-x + 3) \geqslant 1$.

c) $\ln(-x + 1)\ln(x)$.

d) $\ln(3 + 2x) < \ln(x - 3)$.

Exercice 17.

Résolvez les inéquations suivantes.

a) $\ln(x+1) > 0.$

b) $\dfrac{\ln(x)-1}{x^2+1} > 0.$

c) $\dfrac{\ln(x)}{x^2-3x+2} > 0.$

d) $[\ln(x)]^2 - 5\ln(x) + 4 < 0.$

3 Régularité.

Proposition 5

ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration Hors programme.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Démontrons que ln est continue en x.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

■

Proposition 6

ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration

Une justification en admettant la dérivabilité de ln : $\exp \circ \ln(x) = x$ alors en dérivant $\exp \circ \ln(x) \times \ln'(x) = 1$.

■

4 Convexité.

Proposition 7

ln est concave (sur $\mathbb{R}_+^*$).

Démonstration

ln est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$

■

Remarques.

1. Nous en déduisons en particulier que la courbe représentative de ln est au-dessous de toutes ses tangentes.

5 Limites.

Proposition 8

$$\ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \ln(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{\longrightarrow} -\infty$$

Démonstration

■

Exercice 18.

Déterminez la limite en a des fonctions f et g suivantes.

a) $f(x) = 2\left[\ln(x)\right]^2 + 3\ln(x) + 1$ avec $a = +\infty$.

b) $g(x) = -\left[\ln(x)\right]^2 + \ln(x)$ avec $a = 0$.

6 Fonctions composées avec ln.

Proposition 9

Si u est une application dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ alors $\ln \circ u$ est dérivable sur I et

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}.$$

Démonstration

C'est une application directeur du théorème de dérivation des fonctions composées.

■

Remarques.

1. Cette formule est souvent écrite $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

7 Croissances comparées.

Nous devons comparer la croissance de ln à celle de $x \mapsto x^n$ et exp en $+\infty$ et en 0.

Proposition 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n \ln(x) = 0.$$

Démonstration

* Notons $y = \ln(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
  $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{y}{e^y}$.
  Comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, par composition et en reconnaissant une croissance comparée usuelle, $\lim_{x\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0$.
* Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 0$.
  $\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\ln(x)}{x}$.
  $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$ car $n \geqslant 2$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc par passage à la limite dans le produit : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.
* Notons $X = \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
  $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$.
  Puisque $x^n \ln(x) = -\frac{\ln(X)}{x^n}$ nous déduisons de ce qui précède, par composition, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n \ln(x) = 0$.

■

Remarques.

1. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

Exercice 19.

Déterminez la limite en a des fonctions f et g suivantes définies sur $]0; +\infty[$.

1. $f(x) = \left(e^x - 1\right)(1 - \ln(x))$ avec $a = +\infty$.
2. $g(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{x}$ avec $a = 0$.

Exercice 20.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x+1}$.

1. Déterminez la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
2. (a) Vérifiez que pour tout réel $x > 0$: $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{2+\frac{1}{x}}$.

   (b) Déduisez-en la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. interprétez graphiquement les résultats précédents.

Exercice 21.

a et b étant deux nombres réels donnés, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = a + b\frac{\ln(x)}{x}$.
Sachant que $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$ et une tangente $\mathscr{T}$ au point d'abscisse 1 d'équation $y = -x+2$, déterminez les valeurs de a et b.

8 Exercices.

Exercice 22.

Exercice 23.

Déterminez les limites de f au bornes de son domaine de définition $\mathscr{D}$.

a) $f(x) = \ln(3x-1)$ et $E = \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

b) $f(x) = \ln(-x^2+4x)$ et $E =]0;4[$.

c) $f(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$ et $E = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = x\ln(5x)$ et $E =]0;+\infty[$.

e) $f(x) = \ln\left(x+\mathrm{e}^{-x}\right)$ et $E = \mathbb{R}$.

Exercice 24.

Soient f la fonction définie sur $]-2;2[$ par$f(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Justifiez que f est définie sur $]-2;2[$.
2. Montrez que f est impaire puis interprétez graphiquement ce résultat.
3. Démontrez que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes que vous préciserez.
4. Étudiez le sens de variation de f puis donnez son tableau de variation.

Exercice 25.

Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\ln(2x-1)-x+1$.

1. Déterminez la limite de $f(x)$ en $\frac{1}{2}$.
2. Montrez que pour tout réel $x>\frac{1}{2}$: $f(x)=\ln(x)-x+1+\ln\left(2-\frac{1}{x}\right)$. Déduisez-en la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrez que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions distinctes α et β ($\alpha<\beta$).
4. Donnez la valeur exacte de α et un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.

Correction de l'exercice 25

1.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

donc $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}} 2x-1=0^+$.

et $\lim_{X\to 0^+}\ln(X)=-\infty$ donc, par composition $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}}\ln(2x-1)=-\infty$.

2. $x\neq 0$ donc $\ln(2x-1)=\ln\left[x\left(2-\frac{1}{x}\right)\right]$. $x>0$ donc $\ln(2x-1)=\ln(x)\left(2-\frac{1}{x}\right)$.
3.
4. $\alpha=1$.

Exercice 26.

Dans une pièce à la température constante de 20°C on prépare un tasse de thé. À l'instant initial $t=0$ la température du thé est égale à 100°C. Quatre minutes plus tard elle est de 80°C.
On admet que la température du thé $f(t)$ en °C, est donnée par $f(t)=C\mathrm{e}^{at}+20$ où t désigne le temps en minute et a et C sont des constantes réelles.
Au-dessus de 50°C le thé est trop chaud et on ne peut le boire.
Combien de temps faudra-t-il attendre pour boire le thé ?

Exercice 27.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculez la limite de f en 0.
   (b) Déterminez la limite de f en $+\infty$. Donnez-en un interprétation graphique.
2. (a) Montrez que pour tout réel $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$.
   (b) Déduisez-en les variations de f sur $]0,+\infty[$
3. (a) Montrez que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses dont vous préciserez les coordonnées.
   (b) Déduisez-en, le signe de f sur $]0,+\infty[$.

Exercice 28.

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$. Montrez que la fonction g est positive sur $[1,+\infty[$.
2. (a) Montrez que, pour tout x de $[1,+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
   (b) Déduisez-en le sens de variation de f sur $[1,+\infty[$.
3. On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Étudiez la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
4. Pour tout entier naturel k supérieur ou égale à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.
   (a) Déterminez la limite de M_kN_k lorsque k tend vers $+\infty$.
   (b) Écrivez un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier k_0 supérieur ou égale à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

Exercice 29.

Exercice 30.

Identifier parmi les suites dont le terme général est donné ci-après, les situations conduisant à une forme indéterminée lors de l'étude de la convergence, sinon donnez la limite.

On peut schématiquement résumer les formes indéterminées par :

$$(+\infty)-(+\infty),\quad (-\infty)-(-\infty),\quad 0\times\infty,\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \frac{}{0^?}.$$

a) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2^n}$.

b) n^2-6^n.

c) $\ln(n^{-1})+n!$.

d) $2^{-n}+\ln(n)$.

e) $n^{12}+\dfrac{1}{n^{100}}$.

f) $\dfrac{1}{\ln(n)}+n!+1$.

g) $n^2 3^n$.

h) $\dfrac{n^2}{n^{12}}$.

i) $\dfrac{n!}{2^n}$.

j) $n^{-2}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$.

k) $\dfrac{n^{-3}}{\ln(n)}$.

l) $n^5 2^{-n}$.

m) $n^{-3}+0,5^n\ln(n)$.

n) $\dfrac{1}{n^4}\times \mathrm{e}^n+4$.

o) $\dfrac{\ln(n)}{\mathrm{e}^n}$.

Correction de l'exercice 30

a) 0.

b) Indéterminée.

c) Indéterminée.

d)

Exercice 31.

Déterminez, si possible la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

a) $n^7 + 12$.

b) $4^n - 7$.

c) $n^3 + \dfrac{0,1^n}{\ln(n)}$.

d) $\dfrac{1}{n} + 4$.

e) $n^{-4} + \ln(n)$.

f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2 + \dfrac{1}{n^2}$.

g) $n!n^2 + 2 - \dfrac{1}{n^2}$.

h) $\dfrac{\ln(n)}{2 + \mathrm{e}^{-n}}$.

i) $\dfrac{n^4 + 1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 4}$.

j) $\dfrac{n \times 2^n}{3 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}$.

k) $n! - \left(2 - n^2\right)$.

l) $n^2\left(n^3 + \dfrac{3}{\ln(n)} + 1\right)$.

m) $2n^3 + 5n^2 + n - 12$.

n) $-5n^3 - 2n^2 - 12n - 3$.

o) $4n^2 - n + 1$.

p) $\dfrac{n^3}{n^2}$.

q) $n^2 + 3^n + 4 - \dfrac{1}{n}$.