07 Continuité.

I Continuité : définition.

1 Définition.

2 Les fonctions continues de référence.

3 Opérations sur les fonctions continues.

4 Une condition suffisante de continuité.

II Suite image.

III Exercices.

Exercice 1.

Démontrez que $f : x \mapsto 2e^{-\dfrac{1}{x^2}}$ est continue en 0.

Exercice 2.

Démontrez que $f : x \mapsto e^{-\dfrac{1}{x}}$ n'est pas continue en 0.

Exercice 3.

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrez que f n'est pas continue en 0.

Exercice 4.

Soit a un entier strictement positif et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \begin{cases} x^a & \text{si } x \geqslant 0 \\ -|x|^a & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

Montrer que f_a est continue et impaire.

Exercice 5.

Dans chacun des cas suivants étudiez le continuité de f en a.

1. $a = 2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}$ pour $x \neq 2$ et $f(2) = 5$.
2. $a = 1$ et f est définie sur $[-1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x+5} - 3}{x - 1}$ pour $x \neq 1$ et $f(1) = \frac{1}{3}$.

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2}$ pour $x \neq -2$ et $f(-2) = 0$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7.

Soient a et b deux réels, on donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax - 1 & \text{, si } x \in]-\infty, -1[\\ 3x - 2 & \text{, si } x \in]-1; 2[\\ b(x^2 - 5x + 6) & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}.$$

Déterminez, si possible, les valeurs de a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.

Soient (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n où f est la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

1. Justifiez que (u_n) est bien définie.
2. Étudiez les variations de f sur $[1; +\infty[$.
3. Montrez que la suite (u_n) est convergente.
4. Déterminez la limite de (u_n).

Exercice 9.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2$.

1. Si (u_n) converge quelles sont les valeurs possibles de sa limite ℓ ?
2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
3. Étudiez le sens de variation de la suite (u_n).
4. Prouvez que (u_n) converge et précisez sa limite.

Exercice 10.

On considère la suite définie par $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$. Si la suite converge quelle peut être sa limite ?

Exercice 11.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$. On admet que f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

1. Montrez que pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x)$ appartient à $[0, 1]$.
2. Soit D la droite d'équation $y = x$.
   (a) Montrez que $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$ où $g(x)$ est à déterminer.
   (b) Du sens de variation de g déduire le signe de $g(x)$ sur $[0; 1]$.
   (c) Déduisez-en la position relative de D et de la courbe $\mathscr{C}$ représentant f.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Donnez une représentation graphique de $\mathscr{C}$ et D puis dessinez les quatre premiers termes de la suite (u_n).
   (b) Montrez que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   (c) Déduisez-en que (u_n) converge et précisez sa limite.

Exercice 12.

Sujets de bac :

1. Métropole 21 mars 2023 exercice 2 partie B.
2. Polynésie 30 août 2022. Exercice 2.

IV Fonctions prolongeables par continuité.

Exercice 13.

Exercice 14.

Soit $f : x \mapsto 3e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$. Déterminez le domaine de définition de f puis démontrez que f est prolongeable par continuité en 0.

V Théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 15.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2-8}{x^2+1}$ une fonction définie sur $[0;1]$.

1. Calculez $f(0)$ et $f(1)$.
2. Justifiez que l'équation $f(x) = -5$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.
3. Les plus braves déterminerons l'ensemble des antécédents de -5.

Exercice 16.

Démontrez que l'équation $\sqrt{x} + \mathrm{e}^x - 2 = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

1 Cas des fonctions monotones.

Exercice 17.

Déterminez $f(]2;+\infty[)$ lorsque $f : x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{x^2-4}\right)$.

2 Cas des fonctions strictement monotones.

Exercice 18. C

Soit $f : x \mapsto x^3 - 6x + 1$ une fonction définie sur $[-2;+\infty[$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.
2. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[2;+\infty[$.

Exercice 19.

Soit $f : x \mapsto x^3 - 8x + 1$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-1;1]$.

Exercice 20.

Soit $f : x \mapsto 4x^5 + 2x - 2$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution que nous noterons α.
2. Déterminez un encadrement de α à 10^{-2}.

VI Exercices.

Exercice 21.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. Étudiez les variations de g.
2. Montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α. Donnez un encadrement de α à $0,1$ près.
3. Déterminez le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}.$$

   (a) Calculez $f'(x)$ puis exprimez $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
   (b) Déduisez-en le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $]-1,+\infty[$.

Exercice 22.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

1. Étudiez les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminez le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+$ de l'équation $f(x) = 2$.

Exercice 23.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 1.$$

1. Calculez pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Déterminez le signe de $f''(x)$ puis dressez le tableau de variation de f'.
3. (a) Montrez que l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$ donc on donnera en encadrement à $0,1$ près.
   (b) Déduisez-en le signe de f' sur $\mathbb{R}$
   (c) Dressez le tableau de variation de f.

Exercice 24.

On veut résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation : $3x - 2\cos(x) - 2 = 0$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = 3x - 2\cos(x) - 2$. Étudiez les variations de f.
2. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, \pi]$. Donner à la calculatrice un encadrement à $0,1$ près de α.

Exercice 25.

— Baccalauréat S Asie 18 juin 2013 Exercice 2.
— Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie 14 novembre 2013 Exercice 1
— Baccalauréat S Polynésie 17 juin 1999. Problème, partie A.