07 Continuité.

I Continuité : définition.

1 Définition.

2 Les fonctions continues de référence.

3 Opérations sur les fonctions continues.

4 Une condition suffisante de continuité.

II Suite image.

III Exercices.

Exercice 1.

Démontrez que $f : x \mapsto 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ est continue en 0.

Exercice 2.

Démontrez que $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ n'est pas continue en 0.

Exercice 3.

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrez que f n'est pas continue en 0.

Exercice 4.

Soit a un entier strictement positif et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \begin{cases} x^a & \text{si } x \geqslant 0 \\ -|x|^a & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Montrer que f_a est continue et impaire.

Correction de l'exercice 4

1. Le domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et $|-x| = |x|$ donc f_a est impaire.

2. Si a est impair alors $f_a(x) = x^a$ donc f_a est continue.
   Si a est pair alors $f_a = x^a$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Si a est pair alors $f_a = -x^a$ sur $\mathbb{R}_-^*$ donc f_a est continue sur cet ensemble.
   $\lim_{x\to 0} -|x|^a = 0$ et $\lim_{x\to 0} |x|^a = 0$ donc continue en 0.

Exercice 5.

Dans chacun des cas suivants étudiez le continuité de f en a.

1. $a = 2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}$ pour $x \neq 2$ et $f(2) = 5$.
2. $a = 1$ et f est définie sur $[-1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x+5} - 3}{x - 1}$ pour $x \neq 1$ et $f(1) = \frac{1}{3}$.

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2}$ pour $x \neq -2$ et $f(-2) = 0$.
f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Correction de l'exercice 6

$\lim_{x\to -2} f(x) = -5$ donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.

Soient a et b deux réels, on donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax - 1 & \text{, si } x \in]-\infty, -1[\\ 3x - 2 & \text{, si } x \in]-1; 2[\\ b(x^2 - 5x + 6) & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}.$$

Déterminez, si possible, les valeurs de a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 7

$2 - a - 1 = -3 - 2$ donc $a = 6$ et $b(4 - 10 + 6) = 0$ ne peut être égal à $3 \times 2 - 2 = 4$ donc il est impossible que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.

Soient (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n où f est la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

1. Justifiez que (u_n) est bien définie.
2. Étudiez les variations de f sur $[1; +\infty[$.
3. Montrez que la suite (u_n) est convergente.
4. Déterminez la limite de (u_n).

Correction de l'exercice 8

1. Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$.
2. f est strictement croissante.
3. (u_n) est strictement décroissante et minorée par 1 donc convergente.
4. $\ell = \sqrt{1+\ell}$ donc $\ell^2 = 1+\ell$. $\ell = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ donc $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 9.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2$.

1. Si (u_n) converge quelles sont les valeurs possibles de sa limite ℓ ?
2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
3. Étudiez le sens de variation de la suite (u_n).
4. Prouvez que (u_n) converge et précisez sa limite.

Exercice 10.

On considère la suite définie par $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$. Si la suite converge quelle peut être sa limite ?

Correction de l'exercice 10

$x = x^2 - x - 5 \iff x^2 - 2x - 5 = 0 \iff x \in \left\{1+\sqrt{6}; 1-\sqrt{6}\right\}$.

Exercice 11.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}$. On admet que f est strictement croissante sur $[0;1]$.

1. Montrez que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x)$ appartient à $[0,1]$.
2. Soit D la droite d'équation $y = x$.
   (a) Montrez que $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$ où $g(x)$ est à déterminer.
   (b) Du sens de variation de g déduire le signe de $g(x)$ sur $[0;1]$.
   (c) Déduisez-en la position relative de D et de la courbe $\mathscr{C}$ représentant f.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Donnez une représentation graphique de $\mathscr{C}$ et D puis dessinez les quatre premiers termes de la suite (u_n).
   (b) Montrez que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   (c) Déduisez-en que (u_n) converge et précisez sa limite.

Correction de l'exercice 11

1. f est croissante sur $[0;1]$ donc si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$. Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ donc $f(x) \in [0;1]$.
2. (a) Soit $x \in [0;1]$.

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x \\ &= \frac{e^x - 1 - x(e^x - x)}{e^x - x} \\ &= \frac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x} \\ &= \frac{e^x(1-x) + x^2 - 1}{e^x - x} \\ &= \frac{e^x(1-x) + (x-1)(x+1)}{e^x - x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0;1],\ f(x) - x = \frac{(1-x)(e^x - x - 1)}{e^x - x}.}$$

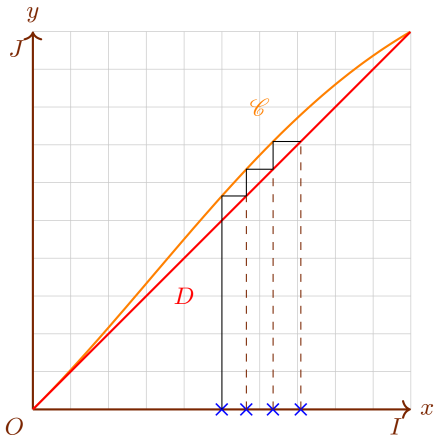
(b) $g'(x) = e^x - 1 > 0$ donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sue $\mathbb{R}_+$.
On en déduit : $\forall x \in [0;1],\ g(x) \geqslant g(0) = 0$.

$$\boxed{g \geqslant 0 \text{ sur } [0;1].}$$

(c) $e^x - x - 1 > 0$ (car, par convexité $e^x > x + 1$, tangente en 0), $g(x) \geqslant 0$ et $1 - x > 0$ pour $x \in [0;1]$.
Ainsi $f(x) - x \geqslant 0$ pour tout $x \in [0;1]$.

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est au-dessus de } D.}$$

3. (a)



(b) Par récurrence. L'hérédité de $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ découle de la question 1. L'hérédité de $0 \leqslant u_{n+1}$ découle de f croissante.

(c) Théorème limite monotone.
Conjecture graphique : converge vers 1.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Longleftrightarrow f(x) - x = 0 \\ &\leftrightarrow 1 - x = 0 \text{ ou } g(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$

Puisque $u_0 = \frac{1}{2}$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \frac{1}{2}$. par conséquent la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être que 1.

Exercice 12.

Sujets de bac :

1. Métropole 21 mars 2023 exercice 2 partie B.
2. Polynésie 30 août 2022. Exercice 2.

IV Fonctions prolongeables par continuité.

Exercice 13.

Exercice 14.

Soit $f : x \mapsto 3e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$. Déterminez le domaine de définition de f puis démontrez que f est prolongeable par continuité en 0.

V Théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 15.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2-8}{x^2+1}$ une fonction définie sur $[0;1]$.

1. Calculez $f(0)$ et $f(1)$.
2. Justifiez que l'équation $f(x) = -5$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.
3. Les plus braves déterminerons l'ensemble des antécédents de -5.

Exercice 16.

Démontrez que l'équation $\sqrt{x} + e^x - 2 = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

1 Cas des fonctions monotones.

Exercice 17.

Déterminez $f(]2;+\infty[)$ lorsque $f : x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{x^2-4}\right)$.

Correction de l'exercice 17

f est dérivable sur $]2,+\infty[$ (donc continue) et $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-4)^2}e^{1/(x^2-4)} < 0$. f est décroissante.

$\lim_{\substack{\to 2\\ x>2}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Enfin : $f(]2,+\infty[) =]0,+\infty[$.

2 Cas des fonctions strictement monotones.

Exercice 18.

Soit $f : x \mapsto x^3 - 6x + 1$ une fonction définie sur $[-2;+\infty[$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.
2. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[2;+\infty[$.

Exercice 19.

Soit $f : x \mapsto x^3 - 8x + 1$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-1;1]$.

Exercice 20.

Soit $f : x \mapsto 4x^5 + 2x - 2$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution que nous noterons α.
2. Déterminez un encadrement de α à 10^{-2}.

VI Exercices.

Exercice 21.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. Étudiez les variations de g.
2. Montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α. Donnez un encadrement de α à $0,1$ près.
3. Déterminez le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}.$$

   (a) Calculez $f'(x)$ puis exprimez $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.

   (b) Déduisez-en le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $]-1,+\infty[$.

Correction de l'exercice 21

1. $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$6x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

2. Sur $]-\infty, 1[$ admet un maximum local égale à -1.
   g est continue sur $]1, +\infty[$ et strictement croissante donc $f(]1, +\infty[) =]-2, +\infty[$.
   Comme $0 \in]-2, +\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   Enfin α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.
3.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g		$-$	0	$+$	

4. (a) $f'(x) = \frac{-1\times(x^3+1)-(1-x)\times 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{2x^3-3x^2-1}{(x^3+1)^2} = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$.
   (b)

x	-1		α		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

Exercice 22.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

1. Étudiez les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminez le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+$ de l'équation $f(x) = 2$.

Correction de l'exercice 22

1. Étudions les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

   * f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
   * Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
     $f'(x) = 3 \times 2x^2 - 2 \times \frac{5}{2}x - 1 = 6x^2 - 5x - 1$.
   * 1 est racine évidente du trinôme $6x^2 - 5x - 1$ donc la seconde racine est $-\frac{1}{6}$.
     Enfin le trinôme est du signe de son coefficient dominant (ici 6) sauf entre les racines.
   * Soit $x \in \mathbb{R}_+$ avec $x > 1$.
     $f(x) = x^3 \left(2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3}\right)$.
     Or d'une part, par somme : $\lim_{x\to+\infty} 2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3} = 2$ et d'autre part $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc, par produit : $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. * D'après le tableau de variation f admet un maximum égale à $\frac{1}{2}$ qui est atteint en 0. Nous en déduisons que $f(x) = 2$ n'a pas de solution sur $[0; 1]$.

   * f est continue sur $[1, +\infty[$ (car polynomiale).
   f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
   $f([1, +\infty[) = [f(1), \lim_{x \to +\infty} f(x)[= [-1, +\infty[$.
   Comme $2 \in [-1, +\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[1, +\infty[$.

$$\boxed{f(x) = 2 \text{ admet une unique solution dans } \mathbb{R}_+.}$$

Exercice 23.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 1.$$

1. Calculez pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Déterminez le signe de $f''(x)$ puis dressez le tableau de variation de f'.
3. (a) Montrez que l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$ donc on donnera en encadrement à $0,1$ près.
   (b) Déduisez-en le signe de f' sur $\mathbb{R}$
   (c) Dressez le tableau de variation de f.

Correction de l'exercice 23

1. f est polynomiale donc indéfiniment dérivable et, pour $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 4x^3 + 6x - 5$ puis $f''(x) = 12x^2 + 6$.
2. * $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

   * Clairement $f'' \geqslant 6 > 0$ donc f' est strictement croissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
f''	$+$	
f'	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3. (a) f est continue sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale),
   f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
   $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$,
   donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
   Avec la calculatrice : $0,6 \leqslant \alpha \leqslant 0,7$.

   (b) De la question précédente nous déduisons

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	

4. $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{-\infty} = +\infty$ donc

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 24.

On veut résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation : $3x - 2\cos(x) - 2 = 0$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = 3x - 2\cos(x) - 2$. Étudiez les variations de f.
2. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, \pi]$. Donner à la calculatrice un encadrement à $0,1$ près de α.

Exercice 25.

— Baccalauréat S Asie 18 juin 2013 Exercice 2.
— Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie 14 novembre 2013 Exercice 1
— Baccalauréat S Polynésie 17 juin 1999. Problème, partie A.