07 Continuité.

I Continuité : définition.

1 Définition.

Pour donner des définitions propres nous aurons besoin de pouvoir dire qu'un nombre a n'est pas sur une borne de l'ensemble $\mathscr{D}$. Pour cela nous dirons que le nombre a est *intérieur à $\mathscr{D}$* s'il existe un voisinage ouvert de a inclus dans $\mathscr{D}$.

Définition 1

> Soient :
>
> . $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,
>
> . a un point intérieur à $\mathscr{D}$.
>
> Une application f est dite *continue en* $a \in \mathscr{D}$ si et seulement si $\lim_a f = f(a)$.

Remarques.

1. Nous dirons que *f est continue sur $\mathscr{D}$* si et seulement si f est continue en tout point de $\mathscr{D}$.
2. Cette définition ne permet pas de définir la continuité en a lorsque $\mathscr{D} = [a, b]$.
3. Graphiquement une fonction est continue sur un intervalle si sa courbe représentative peut être tracée sans lever le stylo.
4. Comme la dérivation ou la croissance, la continuité est une propriété locale : il faut regarder ce qui se passe au voisinage d'un point.
5. Une fonction sera dite *discontinue* si et seulement si elle n'est pas continue.

Exemples.

1.
2.
3. La fonction partie entière n'est continue en aucun point de $\mathbb{Z}$.
4. Les fonctions affines sont continues sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction inverse n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ mais elle est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}^*$.

Proposition 1 - Caractérisation de la continuité.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. a un point intérieur à $\mathscr{D}$.

f est continue en a si et seulement si f admet des limites réelles à droite et à gauche en a égales à $f(a)$.

Démonstration

* Supposons f continue en a.
  Soient α et β des réels tels que $\alpha < a < \beta$.
  Puisque $]\alpha, \beta[$ est un voisinage ouvert de a et que f est continue en a, il existe un voisinage ouvert I de a tel que : $\forall x \in I,\ f(x) \in]\alpha, \beta[$.
  Donc : $\forall x \in I \cap]-\infty, a[,\ f(x) \in]\alpha, \beta[$.
  Autrement dit $\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$.
  De même $\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = f(a)$.
* Réciproquement, supposons que f admet en a des limites à droite et à gauche égales à $f(a)$.
  Soient α et β des réels tels que $\alpha < a < \beta$.
  Puisque $\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$, il existe un voisinage ouvert I_d de a tel que : $\forall x \in I_d \cap]a, +\infty[,\ f(x) \in]\alpha, \beta[$.
  De même de $\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$, nous déduisons l' existence d'un voisinage ouvert I_g de a tel que : $\forall x \in I_g \cap]-\infty, a[,\ f(x) \in]\alpha, \beta[$.
  $I_d \cap I_g$ est un voisinage ouvert de a et : $\forall x \in I_g \cap I_d,\ f(x) \in]\alpha, \beta[$.

$\blacksquare$

Remarques.

1. Nous en déduisons en particulier par contraposition que : si f n'admet pas de limite à droite ou à gauche en a alors f n'est pas continue en a. C'est une méthode à retenir pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.

Notre définition de la continuité nécessite de regarder un voisinage autour de a. Ce n'est pas toujours possible : $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 & & \end{array} \right.$ est continue sur $]0;1[$ mais nous ne pouvons pas dire si elle continue en 0.

Pourtant la fonction carré étant continue sur $\mathbb{R}$ il serait cohérent que nous puisions dire que g est continue en 0.

Définition 2

Soient :

. a et b des réels tels que $a < b$,

. f une application définie sur $[a, b[$.

Nous dirons que f est continue en a si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} f(a)$.

Remarques.

1. Nous pourrons donc dire que f est continue sur $[a, b[$.
2. Nous aurions la même chose en b en considérant une limite par valeurs inférieures.

Exemples.

1. La fonction racine carrée est continue en 0.

2 Les fonctions continues de référence.

Proposition 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) La fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.

(iii) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(iv) Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

(i)

(ii)

(iii)

(iv) Ne peut être démontré (simplement) avec la définition vue pour cosinus et sinus.

■

3 Opérations sur les fonctions continues.

Proposition 3 - opérations sur les fonctions continues.

Soient :

. I un intervalle ouvert,

. $a \in I$,

. f et g des fonctions continues en a,

. $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) $\lambda f + g$ est continue en a.

(ii) $f \times g$ est continue en a.

(iii) Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors $\frac{1}{g}$ est continue en a.

(iv) Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.

Corollaire 1

(i) Toutes les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.

(ii) Toutes les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition.

(iii) La fonction tangente est continue sur son domaine de définition.

Démonstration

1. D'après la proposition 2les $x \mapsto x^n$ sont continues donc d'après la proposition3 toute combinaison linéaire de ces fonction l'est aussi.
2. En utilisant le point précédent et le (iv) de la proposition 3.

■

Proposition 4 - Continuité et composition.

Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

4 Une condition suffisante de continuité.

Proposition 5 - condition suffisante de continuité.

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Démonstration

f est dérivable en a si et seulement si il existe un réel d et une fonction ε telle que $f(x) = f(a) + d(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ et $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Donc si f est dérivable $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

∎

Remarques.

1. La réciproque est fausse. C'est pour cela que l'on parle de condition suffisante : la continuité n'impose pas de façon nécessaire la dérivabilité de la fonction. Le contre exemple usuel est celui de la fonction valeur absolue en 0. Il y a le même phénomène avec la fonction racine cubique en 0.

Corollaire 2

exp est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Par construction de exp (comme solution d'une équation différentielle), exp est dérivable, donc elle est continue.

∎

II Suite image.

Proposition 6

Soient :

. I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$,

. $\ell \in \overline{I}$,

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I convergeant vers ℓ,

. $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

(i) Si f est continue au voisinage de ℓ alors $(f(u_n))$ converge et $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

(ii) Si f est continue sur I, et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$, $f(u_n) = u_{n+1}$ alors $f(\ell) = \ell$.

Remarques.

1. Le deuxième point de la proposition est appelé le théorème du point fixe. Pour une suite définie par une formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ l'éventuelle limite de la suite est à chercher parmi les solutions de l'équation $f(x) = x$.

III Exercices.

Exercice 1.

Démontrez que $f : x \mapsto \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est continue en 0.

Exercice 2.

Démontrez que $f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

Exercice 3.

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrez que f n'est pas continue en 0.

Exercice 4.

Soit a un entier strictement positif et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \begin{cases} x^a & \text{si } x \geqslant 0 \\ -|x|^a & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Montrer que f_a est continue et impaire.

Correction de l'exercice 4

1. Le domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et $|-x| = |x|$ donc f_a est impaire.
2. Si a est impair alors $f_a(x) = x^a$ donc f_a est continue.
   Si a est pair alors $f_a = x^a$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Si a est pair alors $f_a = -x^a$ sur $\mathbb{R}_-^*$ donc f_a est continue sur cet ensemble.
   $\lim_{x\to 0} -|x|^a = 0$ et $\lim_{x\to 0} |x|^a = 0$ donc continue en 0.

Exercice 5.

Dans chacun des cas suivants étudiez le continuité de f en a.

1. $a = 2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}$ pour $x \neq 2$ et $f(2) = 5$.
2. $a = 1$ et f est définie sur $[-1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x + 5} - 3}{x - 1}$ pour $x \neq 1$ et $f(1) = \frac{1}{3}$.

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2}$ pour $x \neq -2$ et $f(-2) = 0$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Correction de l'exercice 6

$\lim_{x \to -2} f(x) = -5$ donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.

Soient a et b deux réels, on donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax - 1 & , \text{si } x \in]-\infty, -1[\\ 3x - 2 & , \text{si } x \in]-1; 2[\\ b(x^2 - 5x + 6) & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}.$$

Déterminez, si possible, les valeurs de a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 7

$2 - a - 1 = -3 - 2$ donc $a = 6$ et $b(4 - 10 + 6) = 0$ ne peut être égal à $3 \times 2 - 2 = 4$ donc il est impossible que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.

Soient (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n où f est la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

1. Justifiez que (u_n) est bien définie.
2. Étudiez les variations de f sur $[1; +\infty[$.
3. Montrez que la suite (u_n) est convergente.
4. Déterminez la limite de (u_n).

Correction de l'exercice 8

1. Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$.

2. f est strictement croissante.
3. (u_n) est strictement décroissante et minorée par 1 donc convergente.
4. $\ell = \sqrt{1+\ell}$ donc $\ell^2 = 1+\ell$. $\ell = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ donc $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 9.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2$.

1. Si (u_n) converge quelles sont les valeurs possibles de sa limite ℓ ?
2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
3. Étudiez le sens de variation de la suite (u_n).
4. Prouvez que (u_n) converge et précisez sa limite.

1. $x = \frac{1}{4}x^2 \iff x \in \left\{0; \frac{1}{4}\right\}$.
2. $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^2$ est croissante sur $[0;3]$ et $f(0) = 0$ et $f(3) = \frac{9}{4} \leqslant 3$.
3. f est croissante et $u_0 \geqslant u_1 = \frac{9}{4}$ donc décroissante.
4. Converge vers 0 car décroissante et $u_1 < 3$.

Exercice 10.

On considère la suite définie par $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$. Si la suite converge quelle peut être sa limite ?

Correction de l'exercice 10

$x = x^2 - x - 5 \iff x^2 - 2x - 5 = 0 \iff x \in \{1+\sqrt{6}; 1-\sqrt{6}\}$.

Exercice 11.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$. On admet que f est strictement croissante sur $[0;1]$.

1. Montrez que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x)$ appartient à $[0,1]$.
2. Soit D la droite d'équation $y = x$.
   (a) Montrez que $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$ où $g(x)$ est à déterminer.
   (b) Du sens de variation de g déduire le signe de $g(x)$ sur $[0;1]$.
   (c) Déduisez-en la position relative de D et de la courbe $\mathscr{C}$ représentant f.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Donnez une représentation graphique de $\mathscr{C}$ et D puis dessinez les quatre premiers termes de la suite (u_n).
   (b) Montrez que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   (c) Déduisez-en que (u_n) converge et précisez sa limite.

Correction de l'exercice 11

1. f est croissante sur $[0;1]$ donc si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$. Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ donc $f(x) \in [0;1]$.
2. (a) Soit $x \in [0;1]$.

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x \\ &= \frac{e^x - 1 - x(e^x - x)}{e^x - x} \\ &= \frac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x} \\ &= \frac{e^x(1-x) + x^2 - 1}{e^x - x} \\ &= \frac{e^x(1-x) + (x-1)(x+1)}{e^x - x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0;1],\ f(x) - x = \frac{(1-x)(e^x - x - 1)}{e^x - x}.}$$

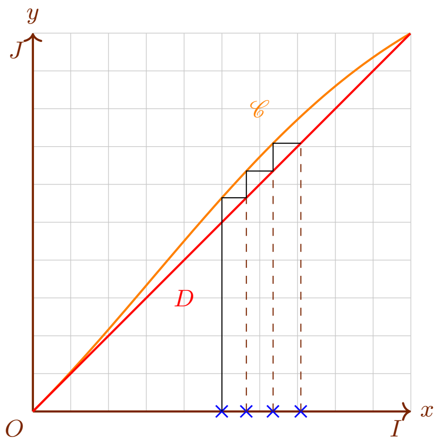
   (b) $g'(x) = e^x - 1 > 0$ donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sue $\mathbb{R}_+$.
   On en déduit : $\forall x \in [0;1],\ g(x) \geqslant g(0) = 0$.

$$\boxed{g \geqslant 0 \text{ sur } [0;1].}$$

(c) $e^x - x - 1 > 0$ (car, par convexité $e^x > x + 1$, tangente en 0), $g(x) \geqslant 0$ et $1 - x > 0$ pour $x \in [0;1]$.
Ainsi $f(x) - x \geqslant 0$ pour tout $x \in [0;1]$.

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est au-dessus de } D.}$$

3. (a)



(b) Par récurrence. L'hérédité de $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ découle de la question 1. L'hérédité de $0 \leqslant u_{n+1}$ découle de f croissante.

(c) Théorème limite monotone.
Conjecture graphique : converge vers 1.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow f(x) - x = 0 \\ &\leftrightarrow 1 - x = 0 \text{ ou } g(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$

Puisque $u_0 = \frac{1}{2}$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \frac{1}{2}$. par conséquent la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être que 1.

Exercice 12.

Sujets de bac :

1. Métropole 21 mars 2023 exercice 2 partie B.
2. Polynésie 30 août 2022. Exercice 2.

IV Fonctions prolongeables par continuité.

La fonction $f : x \mapsto x\ln(x)$ n'est pas définie en zéro mais nous savons que $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2\ln(x) = 0$. Autrement dit par passage à la limite par valeur supérieures nous obtenons une limite. Nous dirons que f est *prolongeable par continuité en* 0 et alors $f(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2\ln(x) = 0$.

Exercice 13.

Exercice 14.

Soit $f : x \mapsto 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$. Déterminez le domaine de définition de f puis démontrez que f est prolongeable par continuité en 0.

V Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 1 - des valeurs intermédiaires.

Soient :

. a et b des réels avec $a < b$,

. f une fonction définie et continue sur $[a, b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarques.

1. Si f est continue sur le segment $[a, b]$ alors f atteint toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.
2. Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes.
3. L'image continue d'un intervalle I est un intervalle noté $f(I)$.
   De plus l'image continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.

Exercice 15.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 8}{x^2 + 1}$ une fonction définie sur $[0; 1]$.

1. Calculez $f(0)$ et $f(1)$.
2. Justifiez que l'équation $f(x) = -5$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.
3. Les plus braves détermineront l'ensemble des antécédents de -5.

Exercice 16.
Démontrez que l'équation $\sqrt{x}+\mathrm{e}^{x}-2=1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

1 Cas des fonctions monotones.

Les différentes images continues d'intervalles.

Soit f une fonction continue et monotone sur un intervalle I. a et b sont dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ suivant les cas.

I	Croissante sur I, alors $f(I)=$	Décroissante sur I, alors $f(I)=$
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a),\lim\limits_{x\to b}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b}f(x),f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a}f(x),f(b)\right]$	$\left[f(b),\lim\limits_{x\to a}f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a}f(x),\lim\limits_{x\to b}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b}f(x),\lim\limits_{x\to a}f(x)\right[$

Exercice 17.
Déterminez $f(]2;+\infty[)$ lorsque $f:x\mapsto\exp\left(\dfrac{1}{x^2-4}\right)$.

Correction de l'exercice 17

f est dérivable sur $]2,+\infty[$ (donc continue) et $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2-4)^2}\mathrm{e}^{1/(x^2-4)}<0$. f est décroissante.

$\lim\limits_{\substack{\to 2\\ x>2}}f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Enfin : $f(]2,+\infty[)=]0,+\infty[$.

2 Cas des fonctions strictement monotones.

Corollaire 3 - Unicité de l'antécédent.

Soient :

. a et b des réels avec $a < b$,

. f une fonction définie sur $[a, b]$.

Si f continue est strictement monotone sur $[a, b]$ alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarques.

1. Pour $k = 0$ alors il suffit de s'assurer que la fonction est continue, strictement monotone et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires pour affirmer l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$. Pour montrer que que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire il suffit de vérifier que $f(a)f(b) < 0$.
2. On peut étendre le corollaire en travaillant avec des intervalles semi-ouverts ou ouverts ($]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$) a et b étant pris dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Dans ce cas on considère $\lim_a f$ et $\lim_b f$ à la place de $f(a)$ et $f(b)$. *Confer supra.*

Exercice 18.

Soit $f : x \mapsto x^3 - 6x + 1$ une fonction définie sur $[-2; +\infty[$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.
2. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[2; +\infty[$.

Exercice 19.

Soit $f : x \mapsto x^3 - 8x + 1$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-1; 1]$.

Exercice 20.

Soit $f : x \mapsto 4x^5 + 2x - 2$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution que nous noterons α.
2. Déterminez un encadrement de α à 10^{-2}.

VI Exercices.

Exercice 21.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. Étudiez les variations de g.
2. Montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α. Donnez un encadrement de α à $0,1$ près.
3. Déterminez le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}.$$

   (a) Calculez $f'(x)$ puis exprimez $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.

   (b) Déduisez-en le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $]-1,+\infty[$.

Correction de l'exercice 21

1. $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$6x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

2. Sur $]-\infty,1[$ admet un maximum local égale à -1.
   g est continue sur $]1,+\infty[$ et strictement croissante donc $f(]1,+\infty[) =]-2,+\infty[$.
   Comme $0 \in]-2,+\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]1,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   Enfin α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

3.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g		$-$	0	$+$	

4. (a) $f'(x) = \frac{-1\times(x^3+1)-(1-x)\times 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{2x^3-3x^2-1}{(x^3+1)^2} = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$.

(b)

x	-1		α		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

Exercice 22.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

1. Étudiez les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminez le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+$ de l'équation $f(x) = 2$.

Correction de l'exercice 22

1. Étudions les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

   * f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
   * Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
     $f'(x) = 3 \times 2x^2 - 2 \times \frac{5}{2}x - 1 = 6x^2 - 5x - 1$.
   * 1 est racine évidente du trinôme $6x^2 - 5x - 1$ donc la seconde racine est $-\frac{1}{6}$.
     Enfin le trinôme est du signe de son coefficient dominant (ici 6) sauf entre les racines.
   * Soit $x \in \mathbb{R}_+$ avec $x > 1$.
     $f(x) = x^3\left(2 - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}\right)$.
     Or d'une part, par somme : $\lim_{x\to+\infty} 2 - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3} = 2$ et d'autre part $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc, par produit : $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. * D'après le tableau de variation f admet un maximum égale à $\frac{1}{2}$ qui est atteint en 0. Nous en déduisons que $f(x) = 2$ n'a pas de solution sur $[0;1]$.

* f est continue sur $[1,+\infty[$ (car polynomiale).
f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
$f([1,+\infty[) = [f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [-1,+\infty[$.
Comme $2 \in [-1,+\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[1,+\infty[$.

$f(x) = 2$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 23.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 1.$$

1. Calculez pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Déterminez le signe de $f''(x)$ puis dressez le tableau de variation de f'.
3. (a) Montrez que l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$ donc on donnera en encadrement à $0,1$ près.
   (b) Déduisez-en le signe de f' sur $\mathbb{R}$
   (c) Dressez le tableau de variation de f.

Correction de l'exercice 23

1. f est polynomiale donc indéfiniment dérivable et, pour $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 4x^3 + 6x - 5$ puis $f''(x) = 12x^2 + 6$.
2. * $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
   * Clairement $f'' \geqslant 6 > 0$ donc f' est strictement croissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
f''	+	
f'	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3. (a) f est continue sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale),
   f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
   $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$,
   donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
   Avec la calculatrice : $0,6 \leqslant \alpha \leqslant 0,7$.

(b) De la question précédente nous déduisons

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	

4. $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{-\infty} = +\infty$ donc

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$ $+\infty$

Exercice 24.

On veut résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation : $3x - 2\cos(x) - 2 = 0$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = 3x - 2\cos(x) - 2$. Étudiez les variations de f.
2. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, \pi]$. Donner à la calculatrice un encadrement à $0,1$ près de α.

Exercice 25.

— Baccalauréat S Asie 18 juin 2013 Exercice 2.
— Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie 14 novembre 2013 Exercice 1
— Baccalauréat S Polynésie 17 juin 1999. Problème, partie A.