06 Vecteurs de l'espace.

I Un point et une base.

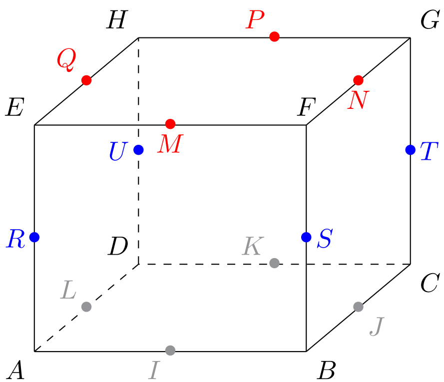
1 Combinaisons linéaires.

Nous appellerons combinaison linéaire une somme (finie) de vecteurs multipliés par des nombres réelles.

Exemples.

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs alors $-3\vec{u}+2\vec{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. $4\vec{i}-\frac{1}{5}\vec{j}+\pi\vec{k}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.
3. $4\vec{i}$ est aussi une combinaison linéaire (avec un unique vecteur).
4. $\vec{0}$ est aussi une combinaisons linéaire.

Dans les exercices lorsqu'on parle d'un parallélépipède rectangle, ou un cube, $ABCDEFGH$ vous pourrez raisonner sur la figure suivante. Les autres points sont les milieux des arêtes.



Exercice 1.

Démontrez les égalités de vecteurs de l'espace.

a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$.

b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$.

c) $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CD}$.

d) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

e) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

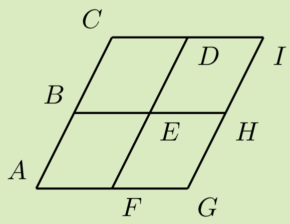
f) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$

Correction de l'exercice 1

Avec la relation de Chasles.

Exercice 2.

On considère la figure plane suivante.



Donnez un autre représentant de chacun des vecteurs proposés.

a) $\overrightarrow{AB}$. b) $\overrightarrow{DF}$. c) $\overrightarrow{GH}$. d) $\overrightarrow{DC}$.

e) $\overrightarrow{BH}$. f) $\overrightarrow{DH}$. g) $\overrightarrow{FC}$. h) $\overrightarrow{HA}$.

i) $\overrightarrow{IE}$.

Correction de l'exercice 2

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HI}$. b) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CA}$. c) $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{ED}$.

d) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HE}$. e) $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AG}$. f) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$.

g) $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{GD}$. h) $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{IB}$. i) $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{DB}$.

Exercice 3.

On considère un parallélépipède rectangle (pavé droit) $ABCDEFGH$.
Donnez, sans justification, d'autres représentants des vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{AB}$. b) $\overrightarrow{CA}$. c) $\overrightarrow{AE}$. d) $\overrightarrow{CF}$.

e) $\overrightarrow{FB}$. f) $\overrightarrow{CG}$. g) $\overrightarrow{CD}$. h) $\overrightarrow{CH}$.

i) $\overrightarrow{BH}$. j) $\overrightarrow{GD}$. k) $\overrightarrow{GH}$. l) $\overrightarrow{DB}$.

m) $\overrightarrow{HF}$. n) $\overrightarrow{EF}$. o) $\overrightarrow{DF}$. p) $\overrightarrow{DE}$.

q) $\overrightarrow{BG}$. r) $\overrightarrow{AF}$. s) $\overrightarrow{BE}$. t) $\overrightarrow{HD}$.

u) $\overrightarrow{HB}$. v) $\overrightarrow{AH}$. w) $\overrightarrow{GA}$. x) $\overrightarrow{AD}$.

y) $\overrightarrow{CB}$.

Correction de l'exercice 3

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$. b) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GE}$. c) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$. d) $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DE}$.

e) $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EA}$. f) $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$. g) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$. h) $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$.

i) $\overrightarrow{BH}$ =?. j) $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{FA}$. k) $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{CD}$. l) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{HF}$.

m) $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{DB}$. n) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$. o) $\overrightarrow{DF}$ =?. p) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$.

q) $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$. r) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG}$. s) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CH}$. t) $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{FB}$.

u) $\overrightarrow{HB}$ =?. v) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$. w) $\overrightarrow{GA}$ =?. x) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

y) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

Exercice 4.

On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.
Exprimez les sommes de vecteurs suivantes sous forme d'un seul représentant faisant intervenir uniquement les points de la figure.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$. b) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH}$.

c) $\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{CD}$. d) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{HG}$.

e) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EA}$. f) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GF}$.

Correction de l'exercice 4

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$. b) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AH}$.

c) $\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CF}$. d) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AF}$.

e) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EA}$ =?. f) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AD}$.

Exercice 5.

On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.
Simplifiez les sommes suivantes sous forme d'un seul représentant. *Vous pourrez utiliser l'identité du parallélogramme.*

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. b) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FH}$. c) $\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DC}$.

d) $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GH}$. e) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}$. f) $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GE}$

g) $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{AB}$. h) $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FH}$

Correction de l'exercice 5

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
b) $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FH}=2\overrightarrow{FQ}$.
c) $\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DG}$.
d) $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GD}$.
e) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AG}$.
f) $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{GA}$
g) $\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}$.
h) $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{FD}$

Exercice 6.

On considère un cube $ABCDEFGH$.
Simplifiez la combinaison linéaire sous forme d'un unique représentant.
Exemple : $-2\cdot\overrightarrow{QM}+1\cdot\overrightarrow{EF}+1\cdot\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{MK}$.

a) $\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PM}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{NQ}$.
b) $\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{IS}+\overrightarrow{TP}$.
c) $3\cdot\overrightarrow{DL}+2\cdot\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{RQ}$.
d) $\overrightarrow{CB}+2\cdot\overrightarrow{UP}$.
e) $\overrightarrow{SI}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{AE}$.
f) $2\cdot\overrightarrow{HQ}+2\cdot\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{FD}$.
g) $\overrightarrow{DE}-2\cdot\overrightarrow{UH}+\overrightarrow{BG}$.

Correction de l'exercice 6

a) $\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PM}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{PQ}$.
b) $\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{IS}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{DP}$.
c) $3\cdot\overrightarrow{DL}+2\cdot\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{DT}$.
d) $\overrightarrow{CB}+2\cdot\overrightarrow{UP}=\overrightarrow{DF}$.
e) $\overrightarrow{SI}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{TF}$.
f) $2\cdot\overrightarrow{HQ}+2\cdot\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{HD}$.
g) $\overrightarrow{DE}-2\cdot\overrightarrow{UH}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{DE}$.

Exercice 7.

On considère un cube $ABCDEFGH$.
Exprimez le vecteur $\vec{u}$ en fonction des vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et éventuellement $\vec{s}$ dans les cas suivants.
Exemple : $\overrightarrow{AF} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{BF}$ *est une expression de* $\vec{u} = \overrightarrow{AF}$ *comme combinaison linéaire des vecteurs* $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{w} = \overrightarrow{BF}$.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

b) $\vec{u} = \overrightarrow{BD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{BA}$.

c) $\vec{u} = \overrightarrow{DG}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.

d) $\vec{u} = \overrightarrow{FC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{HD}$.

e) $\vec{u} = \overrightarrow{MI}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AI}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{GT}$.

f) $\vec{u} = \overrightarrow{QM}$, $\vec{v} = \overrightarrow{HE}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$.

g) $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.

h) $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{CD}$.

i) $\vec{u} = \overrightarrow{HF}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{AE}$.

j) $\vec{u} = \overrightarrow{AP}$, $\vec{v} = \overrightarrow{IB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{DL}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{CT}$.

k) $\vec{u} = \overrightarrow{DS}$, $\vec{v} = \overrightarrow{LR}$, $\vec{w} = \overrightarrow{EH}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{AK}$.

l) $\vec{u} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{UK}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{HE}$.

Correction de l'exercice 7

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} + 1\vec{w}$.

b) $\vec{u} = \overrightarrow{BD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{BA}$.
$\vec{u} = -1\vec{v} + 1\vec{w}$.

c) $\vec{u} = \overrightarrow{DG}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} + 1\vec{w}$.

d) $\vec{u} = \overrightarrow{FC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{HD}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} + 1\vec{w}$.

e) $\vec{u} = \overrightarrow{MI}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AI}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{GT}$.
$\vec{u} = 0\vec{v} + 2\vec{w}$.

f) $\vec{u} = \overrightarrow{QM}$, $\vec{v} = \overrightarrow{HE}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$.
$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$.

g) $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.
Impossible.

h) $\vec{u} = \overrightarrow{DJ}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{CD}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$.

i) $\vec{u} = \overrightarrow{HF}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{AE}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} - 1\vec{w} + 0\vec{s}$.

j) $\vec{u} = \overrightarrow{AP}$, $\vec{v} = \overrightarrow{IB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{DL}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{CT}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} - 2\vec{w} + 2\vec{s}$.

k) $\vec{u} = \overrightarrow{DS}$, $\vec{v} = \overrightarrow{KS}$, $\vec{w} = \overrightarrow{EQ}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{AK}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} - 2\vec{w} + 1\vec{s}$.

l) $\vec{u} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{UK}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{DL}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} + 2\vec{s}$.

Exercice 8.

2 Indépendance linéaire.

Nous dirons que deux (resp. trois) vecteurs sont linéairement indépendants si la seule combinaison linéaire de ces vecteurs qui égale le vecteur nul est obtenue avec des coefficients tous nuls.

Cette définition technique signifie que les vecteurs contiennent des directions différentes, qu'aucun des deux (resp. trois) vecteurs ne peut être retiré sans une perte de possibilité de déplacement.

3 Bases et repères.

On appelle base d'un droite un vecteur directeur de la droite.
On appelle base d'un plan un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non nuls et non colinéaires.
On appelle base de l'espace un triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ non nuls et linéairement indépendants.

Un repère est formé d'une origine (un point) et d'une base.

4 Coordonnées.

Étant donné une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, tout vecteur $\vec{u}$ peut s'écrire comme une unique combinaison linéaire $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Le triplet (x, y, z) est appelé coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Étant donné un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et un point M, on appelle coordonnées de M les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Si dans un repère $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ alors, dans la base correspondante : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

Exemples.

1. Si $A(1; -3; 7)$ et $B(3; 2; 4)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.
2. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est pas une base de l'espace car

5 Norme.

Étant donné une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on appelle norme de $\vec{u}$ le nombre réel $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$. Dans un repère orthonormé la norme et la longueur se confondent.

6 Exercices.

Exercice 9.

On considère une pavé droit $ABCDEFGH$.
Dites si les 3-listes proposées sont des bases de l'espace.

a) $\left(\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{BS}\right)$.
b) $\left(\overrightarrow{KD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}\right)$.
c) $\left(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PF}\right)$.
d) $\left(\overrightarrow{RI}, \overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RS}\right)$.
e) $\left(\overrightarrow{DL}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DH}\right)$.
f) $\left(\overrightarrow{KG}, \overrightarrow{KT}, \overrightarrow{KU}\right)$.
g) $\left(\overrightarrow{FI}, \overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FH}\right)$.
h) $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{NL}\right)$.
i) $\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{FS}, \overrightarrow{GC}\right)$.

Exercice 10.

Donnez 5 bases distinctes du parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.

Exercice 11.

On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Les autres points sont les milieux des arêtes.
Donnez à chaque fois les coordonnées du vecteur dans la base proposée.

a) $\overrightarrow{AG}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

b) $\overrightarrow{DB}$ et $\left(\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HG}\right)$.

c) $\overrightarrow{DH}$ et $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BF}\right)$.

d) $\overrightarrow{AN}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

e) $\overrightarrow{QM}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

f) $\overrightarrow{PJ}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Exercice 12.

Dites si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou pas dans les cas suivants.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\-16\\-57\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\pi\\1\\\sqrt{\pi}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{\pi^3}\\\sqrt{\pi}\\\pi\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 13.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace relativement à une base $\mathscr{B}$.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ constituent-ils une base de l'espace ?

Exercice 14.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace relativement à une base $\mathscr{B}$.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ constituent-ils une base de l'espace ?

Exercice 15.

Soient $A(3, -2, -4)$, $B(4, -3, -2)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

1. Déterminez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils liés ?

Correction de l'exercice 15

1. $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

   $M(4,-3,-2)$.

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{AB}=\vec{u}+\vec{v}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-\vec{u}-\vec{v}=\vec{0}$, il existe doc une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls qui égale le vecteur nul, donc la famille est liée.

Exercice 16.

Soient $A(1,2,3)$, $B(2,0,3)$, et $C(6,3,8)$ des points de l'espace rapporté à un repère, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace.

1. Démontrez que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.
2. Déterminez α, β et γ tels que :
$$\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}.$$
3. Déterminez α', β' et γ' tels que :
$$\overrightarrow{BC}=\alpha'\vec{u}+\beta'\vec{v}+\gamma'\vec{w}.$$
4. Déduisez-en les coordonnées du point C dans le repère $(A;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Exercice 17.

On considère les points $A(1,2,3)$, $B(-1,1,4)$ et $C(3,5,-2)$ dans un repère (O,I,J,K).
Déterminez les coordonnées du point D telles que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Correction de l'exercice 17

$x_C-x_D=x_B-x_A\Leftrightarrow 3-x_D=-1-1\Leftrightarrow x_D=5$.
$y_C-y_D=y_B-y_A\Leftrightarrow 5-y_D=1-2\Leftrightarrow y_D=6$.
$z_C-z_D=z_B-z_A\Leftrightarrow -2-z_D=4-3\Leftrightarrow z_D=-3$.

$$\boxed{D(5,6,-3).}$$

Exercice 18.

On considère les points $A(1,2,1)$, $B(3,-1,2)$ et $C(-1,3,4)$ dans un repère (O,I,J,K).

1. Déterminez les coordonnées du milieu de $[AC]$.
2. Déterminez les coordonnées de D telles que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Correction de l'exercice 18

$x_C - x_D = x_B - x_A \Leftrightarrow -1 - x_D = 3 - 1 \Leftrightarrow x_D = -3.$
$y_C - y_D = y_B - y_A \Leftrightarrow 3 - y_D = -1 - 2 \Leftrightarrow y_D = 6.$
$z_C - z_D = z_B - z_A \Leftrightarrow 4 - z_D = 2 - 1 \Leftrightarrow z_D = 3.$

$$\boxed{D(-3,6,3).}$$

Exercice 19.

Soient les points $A(-1,4,-3)$ et $B(2,1,3)$ dans un repère (O,I,J,K).
Déterminez les coordonnées du point M vérifiant $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Correction de l'exercice 19

$x_A - x_M + x_B - x_A = \frac{1}{3}(x_B - x_A) \Leftrightarrow -1 - x_M + 1 - x_M = \frac{1}{3}(2 - (-3))$

Exercice 20.

On considère les points $A(0,1,1)$, $B(2,1,1)$, $C(3,1,1)$ et $D(1,1,1)$ dans un repère (O,I,J,K).

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Soit $E(2,2,4)$.
   Déterminez les coordonnées du point F telles que $ACEF$ soit un parallélogramme.
3. Soient J le milieu de $[EF]$ et I le point tel que F soit le milieu de $[AI]$.
   Démontrez que J est le milieu de $[IC]$.

Exercice 21.

Soient $A(1,2,1)$, $B(1,-1,1)$ et $C(3,1,2)$ trois points de l'espace rapporté à un repère. On note I le milieu de $[BC]$.

1. Déterminez les coordonnées du point G (centre de gravité du triangle ABC) défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
2. On considère le point $E(3,7,2)$. Déterminez les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.
3. On note J le milieu de $[BE]$. Les points G, J et F sont-ils alignés ?

Exercice 22.

Soient $A(2,4,-1)$, $B(3,1,2)$, $C(1,0,1)$, $D(3,2,1)$ et $E(1,2,0)$.

1. Démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas liés.
2. Le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ peut-il être un repère de l'espace ?
3. Déterminez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Où se situe le point M ?
4. Déterminez α, β, γ tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD}.$$

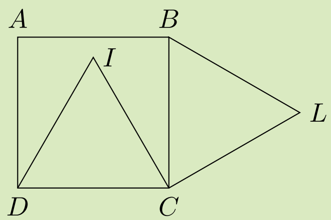
   Quelles sont les coordonnées de E dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$?

II Droites du plan ou de l'espace.

Une droite est définie par un repère c'est-à-dire un point et un vecteur directeur. Il est possible de définir une droite par la donnée de deux points distincts.

Exercice 23.

Soient $ABCD$ un carré, BCL et DIC des triangles équilatéraux tels que sur la figure ci-contre.
Nous souhaitons établir l'alignement des points A, I et L.
Pour cela considérons le repère orthonormé $(D; C; A)$.



1. Donnez sans justification les coordonnées de D, C, A et B.
2. Déterminez les coordonnées de I et L.
3. Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AL}$.
4. Démontrez l'alignement des points A, I et L.

Exercice 24.

Soient $M(7;3)$, $N(-3;1)$, $C(0;5)$ et $E(3;9)$ des points du plan.

1. Montrez que le quadrilatère $MNCD$ est un trapèze.
2. Montrez que E est le point d'intersection de (NC) et (MD).
3. Soient J et K les milieux respectivement de $[NM]$ et $[CD]$. Calculez les coordonnées de J et K.
4. Montrez que E, J et K sont alignés.

Exercice 25.

Soient $A(3;4)$, $B(1;1)$, $C(6;-2)$ et $D(8;1)$ des points, I le milieu de $[BC]$, et E et F les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}.$$

1. Calculez les coordonnées de I, E et F.
2. (a) Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont-ils colinéaires ?
   (b) Qu'en déduisez-vous concernant les droites (BE) et (IF) ?
3. Montrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
4. (a) Calculez la norme du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   (b) $ABCD$est -il un rectangle ?
5. Les points I, F et D sont-ils alignés ?

Correction de l'exercice 25

1. * Déterminons les coordonnées de I.

   Puisque I est le milieu de $[BC]$:

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_B + x_C}{2} \\ &= \frac{1+6}{2} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

   De même : $y_I = -\frac{1}{2}$.

$$\boxed{I\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right).}$$

* Déterminons les coordonnées de E.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6-3 \\ -2-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

D'où : $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\times 3 \\ \frac{1}{3}\times(-6) \end{pmatrix}$ *i.e.* $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

De même : $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E - 3 \\ y_E - 4 \end{pmatrix}$.

De $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ nous déduisons donc

$$\begin{cases} x_E - 3 = 1 \\ y_E - 4 = -2 \end{cases}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{cases} x_E - 3+3 = 1+3 \\ y_E - 4+4 = -2+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_E = 4 \\ y_E = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{E(4;2).}$$

* De même qu'au point précédent

$$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F - 6 = \frac{1}{3}(3-6) \\ y_F - (-2) = \frac{1}{3}(4-(-2)) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 5 \\ y_F = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{F(5;0).}$$

2. (a) Démontrons que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{IF}\right) &= \begin{vmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= 3\times\frac{1}{2} - 1\times\frac{3}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont colinéaires.

(b) Nous déduisons de la question précédente que :

$(BE) \parallel (IF)$.

3. Démontrons que $ABCD$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Par conséquent :

$ABCD$ est un parallélogramme.

4. (a) Calculons $||\overrightarrow{AC}||$.

La formule pour la distance euclidienne est la même que celle pour la norme du vecteur. Par contre comme le repère n'est pas orthonormé la norme ne correspond pas forcément à une longueur.

$$\begin{aligned}
||\overrightarrow{AC}|| &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\
&= \sqrt{(6-3)^2 + (-2-4)^2} \\
&= \sqrt{45} \\
&= \sqrt{3^2 \times 5} \\
&= \sqrt{3^2} \times \sqrt{5}
\end{aligned}$$

$||\overrightarrow{AC}|| = 3\sqrt{5}$.

(b) Nous ne pouvons pas répondre à cette question car le repère n'étant a priori pas orthonormé nous ne pouvons pas établir la présence d'angle droit ou d'égalité de longueur (diagonales).

Si nous supposons que le repère est orthonormé alors, comme $||\overrightarrow{BD}|| = 9$, nous pouvons affirmer que les diagonales du parallélogramme $ABCD$ ne sont pas de même longueur donc ce n'est pas un rectangle.

5. Démontrons que les points I, F et D sont alignés.

Ils sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.

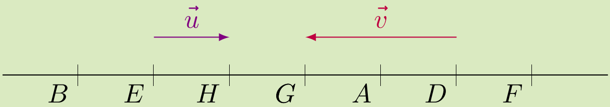
$\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-3\\ -1\end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{IF};\overrightarrow{DF}\right) &= \begin{vmatrix}\frac{3}{2} & -3\\ \frac{1}{2} & -1\end{vmatrix}\\ &= \frac{3}{2}\times(-1)-\frac{1}{2}\times(-3)\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.
Et par conséquent

$$\boxed{I,\ F \text{ et } D \text{ sont alignés.}}$$

Exercice 26.



Donnez sans justification

a) La coordonnée de B dans le repère $(A;\vec{u})$.

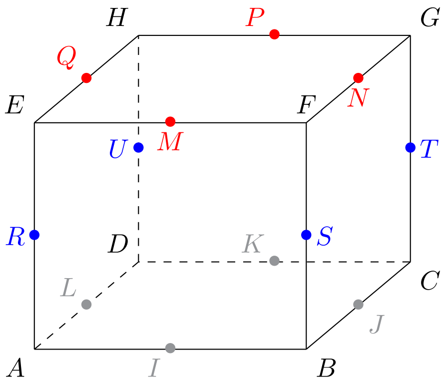
b) La coordonnée de H dans le repère $(B;\vec{v})$.

c) La coordonnée de G dans le repère $(D;2\vec{u})$.

d) La coordonnée de E dans le repère $(F;2\vec{v})$.

e) La coordonnée de A dans le repère $(D;2\vec{v})$.

Dans les exercices lorsqu'on parle d'un parallélépipède rectangle, ou un cube, $ABCDEFGH$ vous raisonnerez sur la figure suivante. Les autres points sont les milieux des arêtes.



Exercice 27.

On considère un pavé droit $ABCDEFGH$.
Dans chaque cas décrivez par deux points la droite dont on donne un point et un vecteur directeur. Exemple : la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AL}$ est la droite (AL).

a) La droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{DC}$.

b) La droite passant par H et de vecteur directeur $\overrightarrow{TJ}$.

c) La droite passant par M et de vecteur directeur $\overrightarrow{UD}$.

d) La droite passant par K et de vecteur directeur $\overrightarrow{BE}$.

e) La droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AE}$.

f) La droite passant par B et de vecteur directeur $\overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HD}$.

g) La droite passant par S et de vecteur directeur $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GH}$.

h) La droite passant par G et de vecteur directeur $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{TC}$.

i) La droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{KU} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KP}$.

j) La droite passant par G et de vecteur directeur $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KJ}$.

k) La droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CG}$.

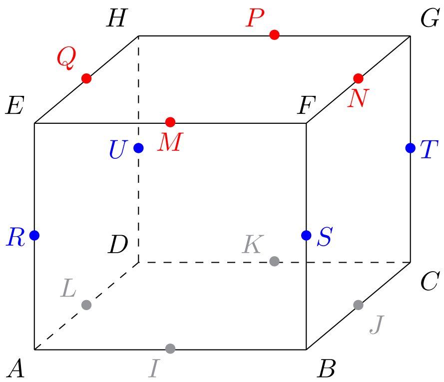
l) La droite passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{UD} + \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{BS}$.

Exercice 28.

III Plans de l'espace.

Un plan de l'espace est défini pas la donnée d'un repère du plan ou de trois points distincts non alignés (O, I, J). D'ailleurs dans ce cas le plan est nommé (OIJ)

Le repère peut être retrouvé à partir des points : $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.



Exercice 29.

Donnez dans chaque cas un quatrième point du plan proposé. Par exemple, pour (ABC) le point D convient : $D \in (ABC)$.

a) (DEF).	b) (HCD).	c) (EFB).	d) (BCF).
e) (FHG).	f) (UJT).	g) (PRM).	h) (LBS).
i) (MJI).	j) (DNH).	k) (NGT).	l) (PQN).
m) (RQM).	n) (USR).	o) (HRT).	

Correction de l'exercice 29

a) $C \in (DEF)$.	b) $G \in (HCD)$.	c) $A \in (EFB)$.	d) $G \in (BCF)$.
e) $M \in (FHG)$.	f) $L \in (UJT)$.	g) $U \in (PRM)$.	h) $Q \in (LBS)$.
i) $N \in (MJI)$.	j) $J \in (DNH)$.	k) $S \in (NGT)$.	l) $G \in (PQN)$.
m) $? \in (RQM)$.	n) $T \in (USR)$.	o) $B \in (HRT)$.	

Exercice 30.

Nommez par trois points distincts deux à deux et non alignés, le plan dont on donne un point et une base.
Par exemple pour A et $\left(\overrightarrow{DU}, \overrightarrow{AB}\right)$, le plan est (ABR), ou (ASF).

a) S et $\left(\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{AD}\right)$.

b) S et $\left(\overrightarrow{LU}, \overrightarrow{DC}\right)$.

c) D et $\left(\overrightarrow{GT}, \overrightarrow{US}\right)$.

d) M et $\left(\overrightarrow{EQ}, \overrightarrow{HP}\right)$.

e) K et $\left(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BS}\right)$.

f) U et $\left(\overrightarrow{UE}, \overrightarrow{UP}\right)$.

g) M et $\left(\overrightarrow{UH}, \overrightarrow{KB}\right)$.

h) D et $\left(\overrightarrow{UM}, \overrightarrow{GT}\right)$.

i) U et $\left(\overrightarrow{SG}, \overrightarrow{HS}\right)$.

Correction de l'exercice 30

a) (BFC).

b) (NRS).

c) (URT).

d) (MFG).

e) (KPL).

f) (UEP).

g) (HMI).

h) (DUM).

i) (UBT).

Exercice 31.

Lisez sur la figure la décomposition en combinaison linéaire du vecteur proposé sur la base donnée.
Par exemple, pour $\overrightarrow{AC}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$, on peut écrire : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

a) $\overrightarrow{AK}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

b) $\overrightarrow{DB}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

c) $\overrightarrow{IK}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

d) $\overrightarrow{LB}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

e) $\overrightarrow{DU}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

f) $\overrightarrow{FP}$ et $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right)$.

g) $\overrightarrow{EJ}$ et $\left(\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{QC}\right)$.

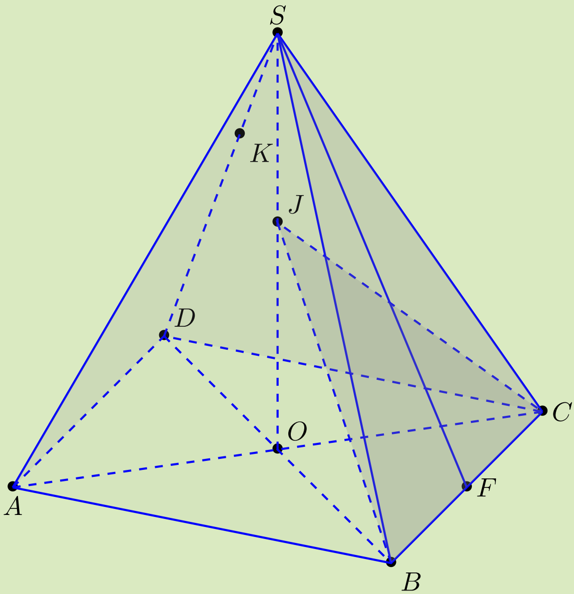
h) $\overrightarrow{IM}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)$.

i) $\overrightarrow{BH}$ et $\left(\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BA}\right)$.

Exercice 32.

Donnez quatre points non coplanaires du cube.

Exercice 33.



Donnez au moins deux bases non triviales des plans suivants. Exemple : pour le plan (ABC), $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right)$ est une base triviale, $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}\right)$ n'est pas une base mais $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}\right)$ est une base qui convient.

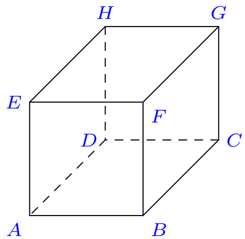
a) (ODJ).
b) (BCJ).
c) (ADK).
d) (SDC).
e) (DOC).
f) (ABS).

IV Positions relatives de droites et plans.

1 Qu'entend-on par positions relatives de droites et de plans ?

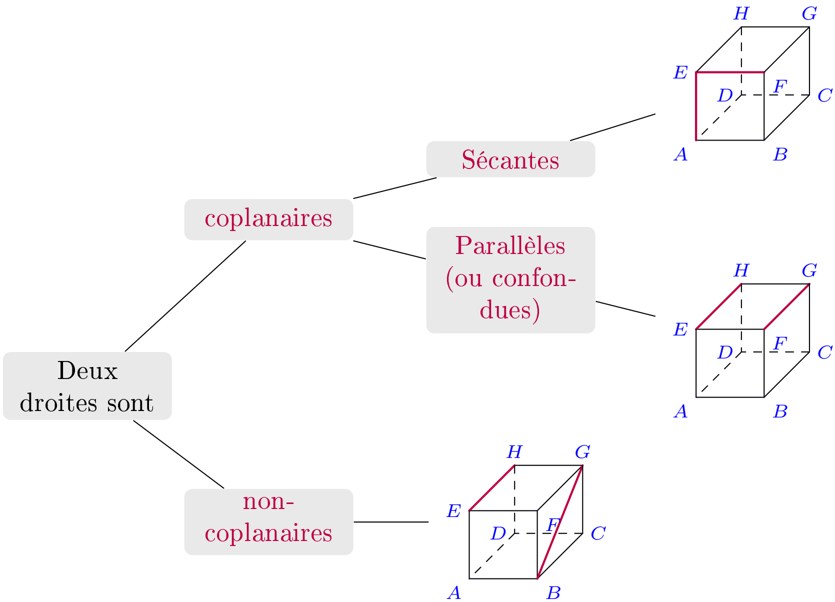
Nous ne donnerons pas ici de définition de parallèle ou sécant. Nous verrons cela ultérieurement. Nous nous contenons d'un approche intuitive à la Euclide.

Afin d'illustrer la leçon nous choisirons des exemples provenant du cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre en perspective cavalière.

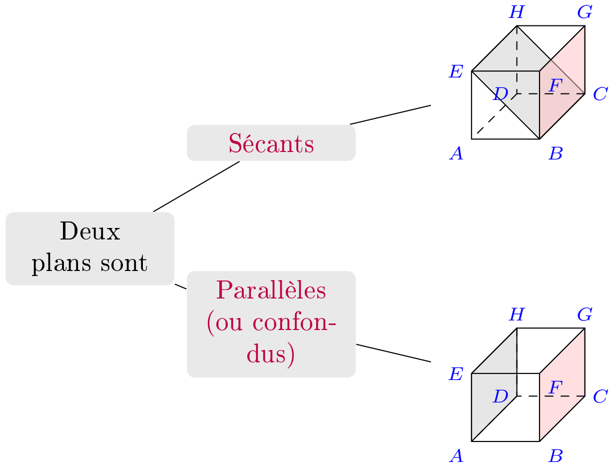


2 Positions relatives de deux droites de l'espace.

Il faut distinguer deux cas suivant que les droites peuvent être vues comme appartenant à un même plan ou non :



3 Positions relatives de deux plans.

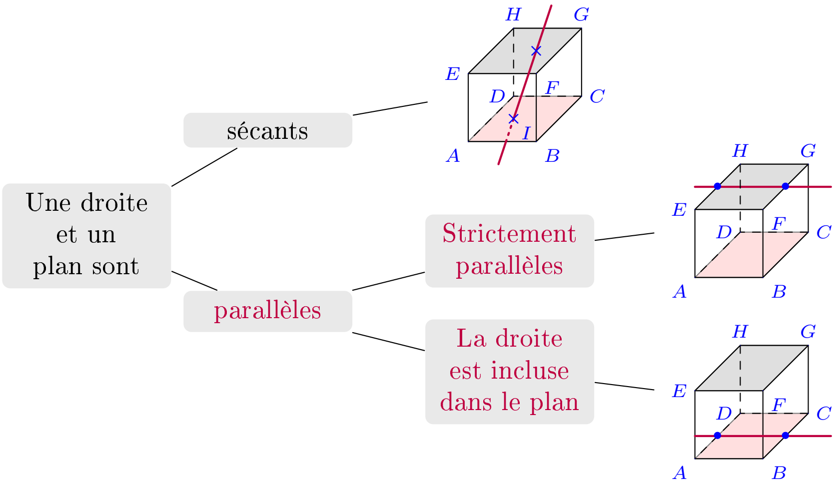


Remarques.

1. L'intersection de deux plans sécants est une droite. Sur la figure : (EBC) et (FBC) se coupent suivant (BC).
2. Si deux plans sont parallèles, alors tout plan sécant à l'un l'est aussi à l'autre.

4 Positions relatives d'une droite et d'un plan.

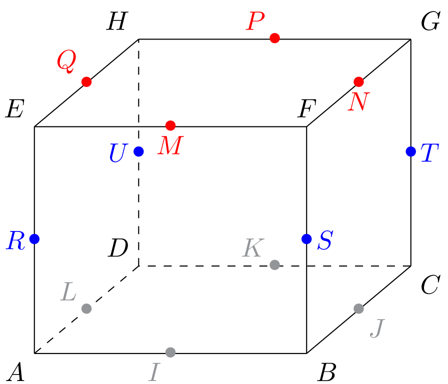
Étude de la position relative de la droite et du plan (ABC).



5 Intersection.

Lorsque l'intersection (partie commune) de droites et de plans est non vide il s'agira de préciser cette intersection en donnant sa nature et son nom.

6 Exercices.



Exercice 34.

Indiquez par lecture la position relative des deux droites proposées.

a) (AD) et (KC). b) (SI) et (UP). c) (UI) et (GR).

d) (EM) et (NG). e) (PG) et (PH). f) (LB) et (JC).

g) (HS) et (RU). h) (RS) et (BM). i) (RM) et (AB).

Exercice 35.

Indiquez par lecture la position relative de la droite et du plan proposés.

a) (IB) et (AFG). b) (PF) et (IKL). c) (BF) et (EHP).

d) (IK) et (ADC). e) (BU) et (ACG). f) (AN) et (REJ).

g) (KM) et (BCG). h) (BE) et (HGS). i) (FN) et (EHB).

Exercice 36.

Indiquez par lecture la position relative des plans proposés.

a) (RMP) et (KTS). b) (PQM) et (HGF). c) (IDC) et (RFP).

d) (DUR) et (SKC). e) (KIM) et (BTS). f) (NEM) et (RUT).

g) (BMP) et (HEI). h) (FCR) et (HIM). i) (HEB) et (JCH).

Exercice 37.

Déterminez l'intersection des deux plans proposés.

a) (MPQ) et (BDS). b) (PIN) et (SIN). c) (QUA) et (KIM).

Exercice 38.

Exercices en ligne pour construire et visualiser les intersections dans l'espace : site du lycée Valin ou directement sur Geogebra.

Exercice 39.