05 Limites de fonctions.

I Voisinage.

II Limites.

1 Définition.

2 Exemples de référence.

3 Propriété.

III Limites en un réel par valeurs supérieures et inférieures.

1 Définition.

2 Exemples de référence.

IV Opérations sur les limites.

Exercice 1.

Déterminez les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f : x \mapsto -2x^7 + 4x^3 + x$.

b) $f : x \mapsto x^3 + 4x^2 - x^4$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{2x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1}{4x^3 + 2x + 7}$.

d) $f : x \mapsto \dfrac{2x^3 + 10x^2 + x}{x^{12} + 1}$.

e) $f : x \mapsto \dfrac{7x^{32} - 13x^{17} + x + 2}{-3x^{32} + x + \pi}$.

f) $f : x \mapsto \dfrac{2x^5 - x^3 + x^6}{2x^4 + x^4 + x^7}$.

Exercice 2.

Soit f une fonction polynomiale de degré 3. Étudiez les limites de f à l'infini.

V Limites et comparaisons.

VI Croissances comparées.

Exercice 3.

Déterminez les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - 1$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \mathrm{e}^2 x - x^3\mathrm{e}^x$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \dfrac{4\mathrm{e}^x}{x}$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x^2}$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{4\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}{x}$.

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{\mathrm{e}}$.

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5-3x}{\mathrm{e}^x}$.

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x-1)\mathrm{e}^x$.

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+x+3)\mathrm{e}^x$.

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x - \mathrm{e}^x$.

l) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 - 2\mathrm{e}^x$.

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x\mathrm{e}^x$.

n) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x - x)\mathrm{e}^x$.

Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Pour tout $x \in [0;+\infty[$ calculez $f'(x)$. Déduisez-en les variations de f sur $[0;+\infty[$.
2. Déterminez la limite de la fonction f en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

Exercice 5.

Étudiez la fonction $f : x \mapsto (2x^3-4x^2)\mathrm{e}^{-x}$. Vous donnerez notamment son tableau de variation en précisant ses éventuelles asymptotes.

Correction de l'exercice 5

$f'(x) = (-2x^3 + 10x^2 - 8x)\mathrm{e}^{-x} = -2x(x-1)(x-4)\mathrm{e}^{-x}$.

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$		$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-2\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$f(4)$	$\searrow$	0

Une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

VII Limites et compositions.

Exercice 6.

Déterminez les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+3}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{1-0{,}5x}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} (5-x)^3$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^4}$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{3x-2}$.

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2+x+\mathrm{e}^{-x}}$.

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2+x+1}$.

h) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{e}^{\frac{2}{x}}$.

i) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (2-3\mathrm{e}^{2x})^5$.

j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{4x^2+1}}$.

k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 3x\mathrm{e}^{3x}$.

l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (2-x)\mathrm{e}^{2-x}$.

VIII Exercices.

Exercice 7.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} - 2x + 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Étudiez les limites de f aux borne de son domaine de définition.
2. Montrez que $(d) : \ y = -2x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ quand x tend vers $-\infty$ (autrement dit la limite de $f(x) - (-2x + 1)$ est 0).
3. Étudiez la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (d) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.

Déterminez le domaine de définition de la fonction définie par $\varphi : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ et justifiez que sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Justifiez que φ est dérivable sur $]-1; 1[$ et calculez $\lim_{x \to -1} \varphi'(x)$, puis tracez la courbe représentative de φ en faisant apparaître toutes les informations précédentes.

Exercice 9.

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.
2. Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ

   Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$.
   (a) Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.
   (b) Justifier que, pour tout réel $x \neq 0$, $h(x) = x\left(\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$.
   En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.
   (c) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.
   (d) Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
   (e) En déduire que, pour tout réel x, $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.
   (f) Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ ?
3. Étude de la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$
   (a) Pour tout réel x, développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.
   (b) Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
4. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 10.

1. Baccalauréat S Asie 18 juin 2013 Exercice 4

Exercice 11.

Exercice 103 page 70 du Sésamath.

Exercice 12.

Exercice 105 page 70 du Sésamath.

Correction de l'exercice 12

1. $p(10)$.
2. (a) $p'(x) = -\frac{-0,2e^{-0,2x}}{(1+e^{-0,2x})^2}$. $p' > 0$. p strictement croissante.
   (b) $\lim_{x\to+\infty} -0,2x = -\infty$ et $\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc, par composition, $\lim_{x\to+\infty} e^{-0,2x} = 0$.
   D'où $\lim_{x\to+\infty} 1 + e^{-0,2x} = 1$ puis en inversant $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-0,2x}} = 1$.
   (c) On se rapproche d'une population intégralement équipée.

Exercice 13.

Exercices 54 et 55 page 180 du manuel Lelivrescolaire.