04 Dérivation.

I Fonctions de référence.

II Combinaisons linéaires.

III Produit et quotient.

IV Dérivation et variation.

1 Rappels.

2 Exercices.

Exercice 1.

Pour la fonction f proposée, procédez à son étude puis donnez l'allure de sa courbe représentative.

L'étude d'une fonction inclus, en toute rigueur et sans exhaustivité : recherche du domaine de définition, étude de la parité, étude de la dérivabilité, calcul de la fonction dérivée, étude du signe de la fonction dérivée, variations de la fonction, calcul d'images remarquables ou simples.

a) $f : x \mapsto x$.

b) $f : x \mapsto x^2$.

c) $f : x \mapsto x^3$.

d) $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

e) $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

f) $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

g) $f : x \mapsto 2x + 3$.

h) $f : x \mapsto -4x + 1$.

i) $f : x \mapsto 3x + 6$.

j) $f : x \mapsto 2x^2 - 4x + 5$.

k) $f : x \mapsto -3x^2 - 12x - 14$.

l) $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

m) $f : x \mapsto -\frac{2}{3}x^3 + 13x^2 + 28x - 17$.

n) $f : x \mapsto -2x^2 + 5\sqrt{x} - \mathrm{e}^x$.

Exercice 2.

Pour la fonction f proposée, procédez à son étude puis donnez l'allure de sa courbe représentative.

a) $f : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{x}$.

b) $f : x \mapsto (x^2+2x+1)\mathrm{e}^{x}$.

c) $f : x \mapsto (-3x+2)\sqrt{x}$.

d) $f : x \mapsto (x^2+x+1)\sqrt{x}$.

e) $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{x}}{x^2+1}$.

f) $f : x \mapsto \frac{-2x+1}{3x+6}$.

g) $f : x \mapsto \frac{x^2-2}{x^2+x+1}$.

h) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

i) $f : x \mapsto \frac{-x+3}{x^7}$.

j) $f : x \mapsto \sqrt{3x+6}$.

k) $f : x \mapsto (2x+1)^7$.

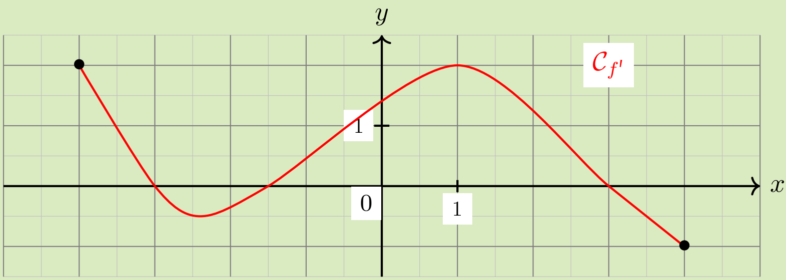
l) $f : x \mapsto \frac{3}{(-2x+1)^3}$.

m) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x+7}$.

n) $f : x \mapsto x^2\mathrm{e}^{3x+6}$.

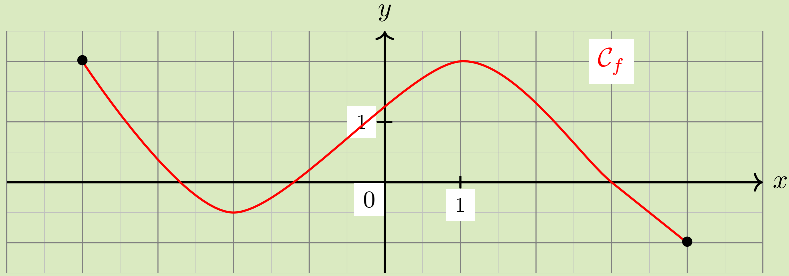
Exercice 3.

Donnez, par lecture graphique, le tableau de variation de la fonction f dont la fonction dérivée f' est représentée ci-dessous.



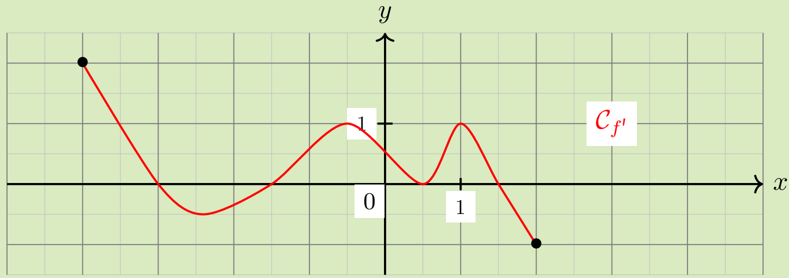
Exercice 4.

Donnez, par lecture graphique, le tableau de signe de la fonction f' dérivée de la fonction f qui est représentée ci-dessous.



Exercice 5.

La dérivée f' d'une fonction f est représentée ci-contre. Par lecture graphique précisez les extrema locaux de f et pour quelles valeurs de x ils sont atteints.



Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthonormal.
Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x-3)$.

1. Position relative.
   (a) Justifiez que pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, $g(x) > 0$.
   (b) $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ ont-elles un point commun ?
2. On note M le point d'abscisse x de $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.
   (a) Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
   (b) On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$, calculer $g'(x)$.
   (c) Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0;+\infty[$ que l'on déterminera. En donner une interprétation graphique.

V Composition.

1 Cas général.

2 Des cas particuliers à connaître par cœur.

3 Exercices.

Exercice 7.

Donnez le domaine de dérivabilité et calculez la dérivée de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f : x \mapsto \sqrt{-4x^2+16}$.

b) $f : x \mapsto 4x + 5\mathrm{e}^{-2x+3}$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-4x}}$.

d) $f : x \mapsto \dfrac{1}{3x^2+9x+6}$.

e) $f : x \mapsto (\sqrt{x}+3)^4$.

f) $f : x \mapsto \dfrac{3x-5}{\mathrm{e}^{3x-5}}$.

g) $f : x \mapsto (2x^3-7x)^5$.

h) $f : x \mapsto \cos(3x)$.

i) $f : x \mapsto \sqrt{3x^2+1}$.

j) $f : x \mapsto \sqrt{4x^2+4x+1}$.

k) $f : x \mapsto \sqrt{x^2-3x-2}$.

l) $f : x \mapsto \left(5x^3-4\right)^2$.

m) $f : x \mapsto (5x^4-3x+2)^6$.

n) $f : x \mapsto \left(\dfrac{1}{x+6}\right)^3$.

Exercice 8.

Donnez le domaine de dérivabilité, calculez la dérivée de la fonction u puis donnez son tableau de variation dans les cas suivants.

a) $h : x \mapsto (2x-4)\mathrm{e}^{-5x}$.

b) $h : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x-1}{2x+1}}$.

c) $h : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{x} - 6$.

d) $h : x \mapsto \dfrac{77}{1+\mathrm{e}^{39-0{,}02x}} + 4$.

e) $h : x \mapsto x\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 1 + x$.

Exercice 9. C

Calculer une dérivée.

Exercices 53 à 58 page 155 du Sésamath.

Exercice 10. C

Étudier une fonction.

Exercices 87 à 89 page 158 du Sésamath.

Exercice 11. C

Étudier une fonction.

Exercices 111 et 112 page 160 du Sésamath.

Exercice 12. C

Étudier une fonction en utilisant monotonie et composition.

Exercices 61 à 64 page 155 du Sésamath.

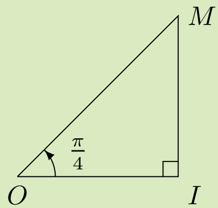
VI Cosinus et sinus d'un nombre réel.

1 Une définition.

2 Des valeurs remarquables de sinus et cosinus.

Exercice 13.

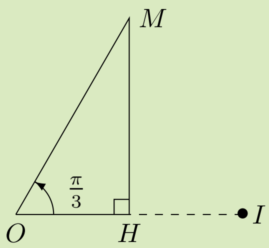
Soient OIM un triangle rectangle en I tel que $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{4}$.



1. (a) Donnez une mesure en degré de $\widehat{IOM}$.
   (b) Justifiez que OIM est isocèle.
   (c) Exprimez OI en fonction de OM.
2. Déterminez, grâce à la définition du cosinus vue au collège, une expression de OI en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et OM.
3. Nous supposons de plus que $OM = 1$. Déduisez-en une valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 14.

Soient OHM un triangle rectangle en H tel que $OM = 1$ et $\widehat{HOM} = \frac{\pi}{3}$, I le symétrique de O par rapport à H.



1. (a) Donnez une mesure en degré de $\widehat{HOM}$.
   (b) Justifiez que $OI = 1$.
   (c) Déduisez-en la longueur OH.
2. En utilisant la définition du cosinus vue au collège donnez une égalité liant OH et $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Puis déduisez-en une valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
3. En remarquant que $MH = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, trouvez une expression radicale de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

VII Propriétés des sinus et cosinus.

Exercice 15.

Déterminez si la fonction f est paire, impaire, périodique.

a) $f(x) = 3\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$.

b) $f(x) = \sin(2x)\cos(x)$.

VIII Dérivées.

Exercice 16.

Déterminez les dérivées de la fonction f dont l'expression algébrique est donnée ci-après (sans se préoccuper de la dérivabilité).

a) $3\sin(x) - 2\cos(2x)$.

b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos(x)$.

c) $\sin(x)\cos(2x)$.

d) $\sin(2x-1)\cos\left(\frac{3}{4} - 2x\right)$.

e) $x^2 - \cos(x)$.

f) $x - \sin(2x)$.

g) $3\sin(x) - \cos(3x) + 3$.

h) $\sin^2(x)$.

i) $\cos^2(x)$.

j) $x^2\sin(x)$.

k) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

l) $\frac{5}{\cos(x)}$.

m) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

n) $\cos(4x)\sin(-4x)$.

Exercice 17.

On considère un circuit électromagnétique comprenant :

— un condensateur dont la capacité (exprimée en farad) est C,

— une bobine dont l'inductance (exprimée en henry) est L,

— un interrupteur.

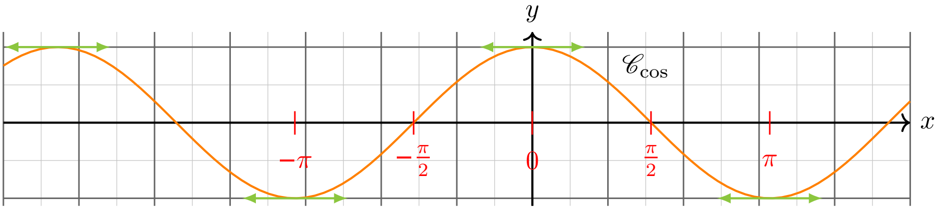
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit. On nomme $q(t)$ la valeur de la charge, exprimée en coulomb, du condensateur à l'instant t. On définit ainsi une fonction q, dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

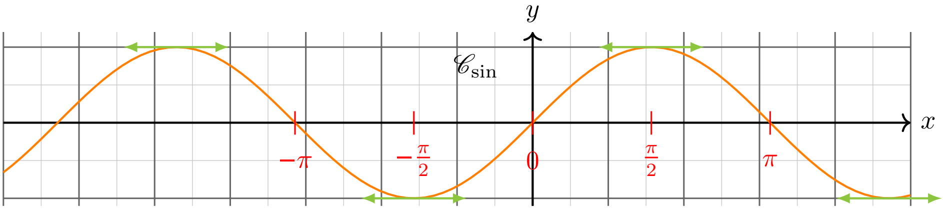
On admet que $q(t) = \dfrac{1}{200}\sin\left(200t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

1. Montrez que $T = \frac{\pi}{100}$ est une période de q.
2. Montrez que la fonction q n'est ni paire ni impaire.
3. Calculez la dérivée de la fonction q et dressez son tableau de variation sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{100}\right]$.

Exercice 18.

IX Courbes représentatives.





X Des formules calculatoires.

Formules d'addition.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(b)\sin(b)$$

Exercice 19.

1. Calculez $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ en utilisant la formule d'addition.
2. De $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ déduisez les valeurs de sinus et de cosinus $\frac{\pi}{12}$.

Exercice 20.

Soit s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $s(x) = (-1+\sin(x))(\sin(x)+1)$.

Exercice 21.

Déterminez sans calcul le maximum sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$.