04 Dérivation.

I Fonctions de référence.

$f(x) =$	$k \in \mathbb{R}$	x	x^2	x^3	x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	e^x
$f'(x) =$	0	1	$2x$	$3x^2$	nx^{n-1}	e^x

$f(x) =$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$f'(x) =$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$

Si g est dérivable et si la fonction $x \mapsto g(ax+b)$ est bien définie alors cette dernière est dérivable et sa dérivée est $x \mapsto ag'(ax+b)$.

II Combinaisons linéaires.

Proposition 1

Soient :

. λ et μ des réels,

. f et g des fonctions.

Si $f$et g sont dérivables sur un intervalle I alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

Corollaire 1

Toute fonction polynomiale $P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $P'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1$.

III Produit et quotient.

Proposition 2

Si u et v sont des fonctions dérivables sur I alors uv est dérivable sur I et

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Proposition 3

Si u et v sont des fonctions dérivables sur I et v ne s'annule pas sur I alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

IV Dérivation et variation.

1 Rappels.

Trois propositions importantes sont à savoir mettre en pratique.

(i) f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.

(ii) Si $f' > 0$ alors f est strictement croissante.

(iii) $f' = 0$ si et seulement si f est constante.

2 Exercices.

Exercice 1.

Pour la fonction f proposée, procédez à son étude puis donnez l'allure de sa courbe représentative.
L'étude d'une fonction inclus, en toute rigueur et sans exhaustivité : recherche du domaine de définition, étude de la parité, étude de la dérivabilité, calcul de la fonction dérivée, étude du signe de la fonction dérivée, variations de la fonction, calcul d'images remarquables ou simples.

a) $f : x \mapsto x$.

b) $f : x \mapsto x^2$.

c) $f : x \mapsto x^3$.

d) $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

e) $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

f) $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

g) $f : x \mapsto 2x + 3$.

h) $f : x \mapsto -4x + 1$.

i) $f : x \mapsto 3x + 6$.

j) $f : x \mapsto 2x^2 - 4x + 5$.

k) $f : x \mapsto -3x^2 - 12x - 14$.

l) $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

m) $f : x \mapsto -\frac{2}{3}x^3 + 13x^2 + 28x - 17$.

n) $f : x \mapsto -2x^2 + 5\sqrt{x} - \mathrm{e}^x$.

Correction de l'exercice 1

a) Fonction de référence. $f' : x \mapsto 1$.

b) Fonction de référence. $f' : x \mapsto 2x$.

c) Fonction de référence. $f' : x \mapsto 3x^2$.

d) Fonction de référence. $f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

e) Fonction de référence. $f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

f) Fonction de référence. $f' : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

g) Fonction affine. $f' : x \mapsto 2$.

h) Fonction affine. $f' : x \mapsto -4$.

i) Fonction affine. $f' : x \mapsto 3$.

j) Fonction polynomiale de degré deux. Possibilité d'étude des variations avec la forme canonique du trinôme.

Étudions la fonction f.

* Calculons la dérivée de f.
  f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 4x - 4.$$

* Étude du signe de f'.
  f' est affine de coefficient directeur $4 > 0$ donc strictement croissante. De plus $f'(x) = 0 \iff x = 1$.
* Nous en déduisons

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	3	$\nearrow$	

* Pour le tracer faire apparaître le point de coordonnées $(1; 3)$ et la tangente horizontale en ce point. Mais aussi le point d'intersection avec l'axe des ordonnées de coordonnées $(0; 5)$.

k) $f' : x \mapsto -6x - 12$.

l)

Étudions la fonction f.

- Calculons la dérivée de f.
  f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = x^2 + x - 2.$$

- Étude du signe de f'.
  f' est polynomiale de degré deux et son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$.
  $\Delta > 0$ donc f'admet deux racines réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -2,$$
  et
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 1.$$
  De plus le coefficient dominant de f' est $a = 1 > 0$.

- Nous en déduisons (le trinôme es du signe de son coefficient dominant sauf entre les racines) :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\frac{13}{3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{6}$	$\nearrow$	

- Pour le tracer faire apparaître les points de coordonnées $\left(-2, \frac{13}{3}\right)$ et $\left(1, -\frac{1}{6}\right)$ et la tangente horizontale en ces points. Mais aussi le point d'intersection avec l'axe des ordonnées de coordonnées $(0; 1)$.

m) $f' : x \mapsto -x^2 + 26x + 28.$

n) $f' : x \mapsto -4x + \frac{5}{2\sqrt{x}} - \mathrm{e}^x.$

Exercice 2.

Pour la fonction f proposée, procédez à son étude puis donnez l'allure de sa courbe représentative.

a) $f : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^x$.

b) $f : x \mapsto (x^2+2x+1)\mathrm{e}^x$.

c) $f : x \mapsto (-3x+2)\sqrt{x}$.

d) $f : x \mapsto (x^2+x+1)\sqrt{x}$.

e) $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$.

f) $f : x \mapsto \frac{-2x+1}{3x+6}$.

g) $f : x \mapsto \frac{x^2-2}{x^2+x+1}$.

h) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

i) $f : x \mapsto \frac{-x+3}{x^7}$.

j) $f : x \mapsto \sqrt{3x+6}$.

k) $f : x \mapsto (2x+1)^7$.

l) $f : x \mapsto \frac{3}{(-2x+1)^3}$.

m) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x+7}$.

n) $f : x \mapsto x^2\mathrm{e}^{3x+6}$.

Correction de l'exercice 2

a) $f' : x \mapsto \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x$. $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$.

b) $f' : x \mapsto (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2+2X+1)\mathrm{e}^x$. $f'(x) = (x^2+4x+3)\mathrm{e}^x$.

c) $f' : x \mapsto -3\sqrt{x} + \frac{-3x+2}{2\sqrt{x}}$. $f'(x) = \frac{-9x+2}{2\sqrt{x}}$.

d) $f' : x \mapsto (2x+1)\sqrt{x} + \frac{x^2+x+1}{2\sqrt{x}}$. $f'(x) = \frac{5x^2+3x+1}{2\sqrt{x}}$.

e) $f' : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x(x^2+1)-2x\mathrm{e}^x}{(x^2+1)^2}$. $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$.

f) $f' : x \mapsto \frac{-2(3x+6)-3(-2x+1)}{(3x+6)^2}$. $f'(x) = -\frac{15}{(3x+6)^2}$.

g) $f' : x \mapsto \frac{2x(x^2+x+1)-(x^2-2)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$. $f'(x) = \frac{2x^3+2x^2+2x-2x^3-x^2+4x+2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2+6x+2}{(x^2+x+1)^2}$.

h) $f' : x \mapsto \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{(x+1)^2}$. $f'(x) = \frac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$.

i) $f' : x \mapsto \frac{-x^7-(-x+3)7x^6}{(x^7)^2}$. $f'(x) = \frac{6x^7-21x^6}{(x^7)^2} = \frac{x^6(6x-21)}{(x^7)^2}$.

j) $f' : x \mapsto \frac{3}{2\sqrt{3x+6}}$.

k) $f' : x \mapsto 2 \times 7(2x+1)^6$.

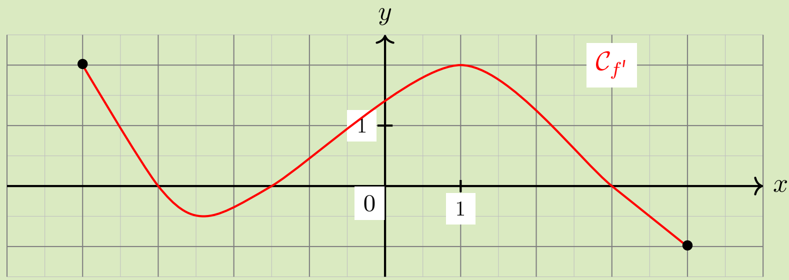
l) $f' : x \mapsto \frac{3\times(-3)\times(-2)}{(-2x+1)^4}$.

m) $f' : x \mapsto -2\mathrm{e}^{-2x+7}$.

n) $f' : x \mapsto 2x\mathrm{e}^{3x+6} + x^2 3\mathrm{e}^{3x+6}$. $f'(x) = x\mathrm{e}^{3x+6}(3x-2)$.

Exercice 3.

Donnez, par lecture graphique, le tableau de variation de la fonction f dont la fonction dérivée f' est représentée ci-dessous.



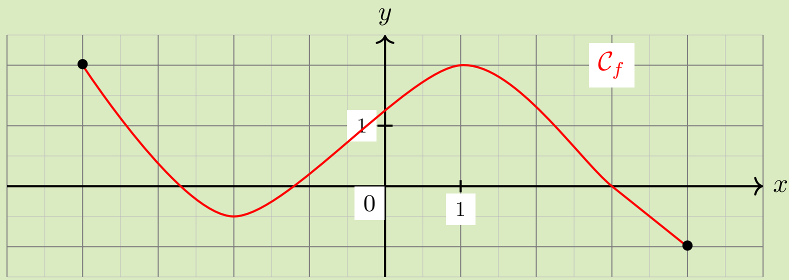
Correction de l'exercice 3

C'est la fonction dérivée, f', qui est représentée. À partir de son signe nous pourrons retrouver les variations de f d'après le théorème.

Pour se représenter les choses et justifier notre réponse, nous pouvons construire un tableau indiquant le signe de la dérivée et la variation de la fonction.

Exercice 4.

Donnez, par lecture graphique, le tableau de signe de la fonction f' dérivée de la fonction f qui est représentée ci-dessous.

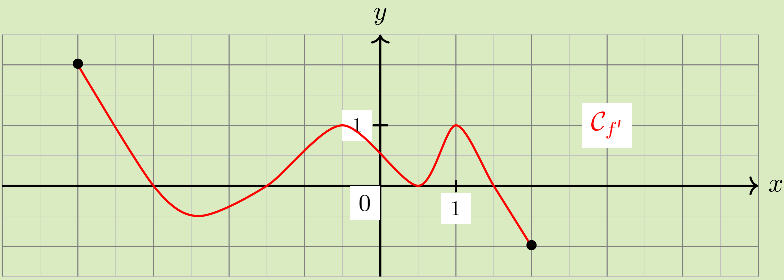


Correction de l'exercice 4

C'est la fonction f qui est représentée. À partir de ses variations nous pourrons retrouver le signe de sa fonction dérivée f' d'après le théorème.

Exercice 5.

La dérivée f' d'une fonction f est représentée ci-contre. Par lecture graphique précisez les extrema locaux de f et pour quelles valeurs de x ils sont atteints.



Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthonormal.
Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x-3)$.

1. Position relative.
   (a) Justifiez que pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, $g(x) > 0$.
   (b) $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ ont-elles un point commun ?
2. On note M le point d'abscisse x de $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.
   (a) Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
   (b) On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$, calculer $g'(x)$.

V Composition.

Nous avons déjà vu en première que si $u(x) = ax + b$ alors la dérivée de $x \mapsto g(ax+b)$ est $x \mapsto ag'(ax+b)$.

1 Cas général.

Proposition 4

Soient :

. I et J des intervalles,

. $u : I \to J$ une fonction définie sur I,

. $v : J \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur J.

Si u est dérivable sur I et si v est dérivable sur J alors $v \circ u$ est dérivable sur I et

$$(v \circ u)' = v' \circ u \times u'.$$

2 Des cas particuliers à connaître par cœur.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u, \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \quad (u^n)' = nu'u^{n-1}, \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}, \quad \left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}.$$

3 Exercices.

Exercice 7.

Donnez le domaine de dérivabilité et calculez la dérivée de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f : x \mapsto \sqrt{-4x^2 + 16}$.

b) $f : x \mapsto 4x + 5\mathrm{e}^{-2x+3}$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{2}{1 + \mathrm{e}^{-4x}}$.

d) $f : x \mapsto \dfrac{1}{3x^2 + 9x + 6}$.

e) $f : x \mapsto (\sqrt{x} + 3)^4$.

f) $f : x \mapsto \dfrac{3x - 5}{\mathrm{e}^{3x-5}}$.

g) $f : x \mapsto (2x^3 - 7x)^5$.

h) $f : x \mapsto \cos(3x)$.

i) $f : x \mapsto \sqrt{3x^2 + 1}$.

j) $f : x \mapsto \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$.

k) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x - 2}$.

l) $f : x \mapsto \left(5x^3 - 4\right)^2$.

m) $f : x \mapsto (5x^4 - 3x + 2)^6$.

n) $f : x \mapsto \left(\dfrac{1}{x + 6}\right)^3$.

Correction de l'exercice 7

a) $u'(x) = -\frac{4x}{\sqrt{-4x^2+16}}$ et $\mathscr{D}_{f'} =]-2;2[$.

b) $u'(x) = 4 + -10\mathrm{e}^{-2x+3}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

c) $u'(x) = \frac{8\mathrm{e}^{-4x}}{(1+\mathrm{e}^{-4x})^2}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

d) $u'(x) = -\frac{6x+9}{(3x^2+9x+6)^2}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$.

e) $u'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}+3)^3$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}_+^*$.

f) $u'(x) = \frac{3\mathrm{e}^{3x-5}-3(3x-5)\mathrm{e}^{3x-5}}{(\mathrm{e}^{3x-5})^2} = \frac{(-9x+18)\mathrm{e}^{3x-5}}{(\mathrm{e}^{3x-5})^2}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

g) $u'(x) = 5(6x^2-7)(2x^3-7x)^4$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

h) $u'(x) = -3\sin(x)$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

i) $u'(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

j) $u'(x) = \frac{4x+2}{\sqrt{4x^2+4x+1}}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

k) $u'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-2}}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right\}$.

l) $u'(x) = 30x^2(5x^3-4)$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

m) $u'(x) = 6(20x^3-3)(5x^4-3x+2)^5$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

n) $u'(x) = \frac{-3}{(x+6)^4}$.

Exercice 8.

Donnez le domaine de dérivabilité, calculez la dérivée de la fonction u puis donnez son tableau de variation dans les cas suivants.

a) $h : x \mapsto (2x-4)\mathrm{e}^{-5x}$.

b) $h : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x-1}{2x+1}}$.

c) $h : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{x} - 6$.

d) $h : x \mapsto \dfrac{77}{1+\mathrm{e}^{39-0,02x}} + 4$.

e) $h : x \mapsto x\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 1 + x$.

Correction de l'exercice 8

a) $h'(x) = [2-5(2x-4)]\,\mathrm{e}^{-5x} = 2(-5x+11)\mathrm{e}^{-5x}$.

x	$-\infty$		$\frac{11}{5}$		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-5}$	$\searrow$	0

b) $h'(x) = \frac{4}{(2x+1)^2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
h'		$+$				$+$	
h	1	$\nearrow$	$+\infty$		0	$\nearrow$	1

c) $h'(x) = \mathrm{e}^x\left(2\mathrm{e}^x + 4\right)$. h' strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d) $h'(x) = \frac{0{,}02\times 77\mathrm{e}^{39-0{,}02x}}{(1+\mathrm{e}^{39-0{,}02x})^2}$. h' et strictement croissante.

e) $h'(x) = [1 - 2(x+1)]\,\mathrm{e}^{-2x} + 1$. h est croissante avec dérivée seconde.

Exercice 9.

Calculer une dérivée.

Exercices 53 à 58 page 155 du Sésamath.

Correction de l'exercice 9

Exercice 53 : $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x+2}$.
Exercice 54 : $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.
Exercice 55 : $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)$.
Exercice 56 : $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
Exercice 57 : $f'(x) = -4\sin(4x)$.
Exercice 58 : $f'(x) = -12\mathrm{e}^{-x}\left(4\mathrm{e}^{-x}+1\right)^2$.

Exercice 10.

Étudier une fonction.

Exercices 87 à 89 page 158 du Sésamath.

Exercice 11. C

Étudier une fonction.

Exercices 111 et 112 page 160 du Sésamath.

Correction de l'exercice 11

Exercice 112 page 160 du Sésamath.

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $f'(2) = 0$.
2. (a) $f'(x) = x(2-x)\mathrm{e}^{-x+1}$.

(b)

x	0		2		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$	0	$-$	
f'	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	0

(c) $y = f'(4)(x-4) + f(4)$, $y = -8\mathrm{e}^{-3}x + (32+16)\mathrm{e}^{-3}$.

3. (a) $f''(x) = (2-2x)\mathrm{e}^{-x+1} - (2x-x^2)\mathrm{e}^{-1+x} = (x^2-4x+2)\mathrm{e}^{-1+x} = (x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})\mathrm{e}^{-1+x}$. f est convexe sur $]-\infty; 2-\sqrt{3}[$ et sur $]2+\sqrt{3}; +\infty[$. Elle est concave sur $]2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}[$.

4. $g'(x) = -f'(x)\mathrm{e}^{f(x)} = -x(2-x)\mathrm{e}^{x+1}\mathrm{e}^{f(x)}$.
$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

x	0		2		$+\infty$
g'	0	$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	$\exp\left(4\mathrm{e}^{-1}\right)$	$\nearrow$	1

5. $h'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{x(2-x)\mathrm{e}^{x+1}}{2\sqrt{f(x)}}$.
$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = \sqrt{0} = 0$.

x	0		2		$+\infty$
h'	0	$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	$\sqrt{4\mathrm{e}^{-1}}$	$\searrow$	0

Exercice 12.

Étudier une fonction en utilisant monotonie et composition.
Exercices 61 à 64 page 155 du Sésamath.

VI Cosinus et sinus d'un nombre réel.

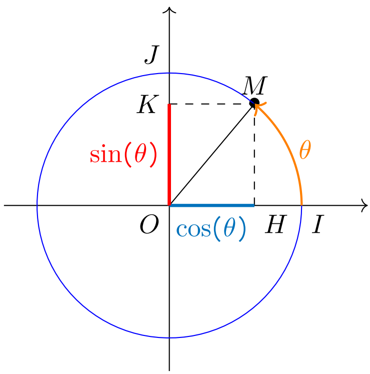
1 Une définition.

Les cosinus et sinus ont été définis au collège, mais uniquement pour des angles d'un triangle rectangle, donc d'une mesure entre 0° et 90°. Or les skateurs ou les patineurs le savent il est tout à fait possible d'envisager des angles de plus de 360°, il faut donc trouver une définition qui généralise celle du collège. D'autant que nous venons de définir une mesure d'angle qui autorise toutes les valeurs réelles.

Définition 1

Soit un angle de mesure θ en radian, repéré par un point M sur le cercle trigonométrique.

Nous définirons désormais :
- $\cos(\theta)$ comme l'abscisse de M,
- $\sin(\theta)$ comme l'ordonnée de M.



Remarques.

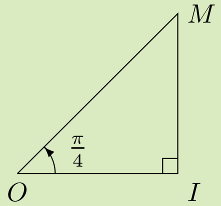
1. Cette définition permet d'étendre les notions de cosinus et sinus vues au collège.
   Les deux définitions coïncident (pour un angle compris entre 0° et 90°) :
$$\cos\left(\widehat{IOM}\right) = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{1} = OH = \cos(\theta)$$
   et
$$\sin\left(\widehat{IOM}\right) = \frac{HM}{OM} = \frac{HM}{1} = HM = OK = \sin(\theta).$$
   Par conséquent les raisonnements faits depuis le collège et jusqu'à présent restent licites.
2. Avec cette définition le cosinus et le sinus peuvent prendre des valeurs négatives.
3. Clairement, en considérant les abscisses et ordonnées des points du cercle trigonométrique, pour tout angle α
$$-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$$
$$-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$$

4. Avec le théorème de Pythagore on retrouve la relation vue en seconde $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2 Des valeurs remarquables de sinus et cosinus.

Exercice 13.

Soient OIM un triangle rectangle en I tel que $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{4}$.



1. (a) Donnez une mesure en degré de $\widehat{IOM}$.
   (b) Justifiez que OIM est isocèle.
   (c) Exprimez OI en fonction de OM.
2. Déterminez, grâce à la définition du cosinus vue au collège, une expression de OI en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et OM.
3. Nous supposons de plus que $OM = 1$. Déduisez-en une valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Correction de l'exercice 13

1. (a) Par proportionnalité

2π	$\frac{\pi}{4}$
360	45

$\widehat{IOM}$ mesure 45°.

   (b) La somme des mesures des angles d'un triangle doit être égale à 180° donc (en degré)

$$45 + 90 + \widehat{OMI} = 180.$$

D'où : $\widehat{OMI} = 180 - 90 - 45 = 45$.
Ainsi $\widehat{OMI} = \widehat{IOM}$ et par conséquent

OIM est isocèle en I.

(c) OIM est rectangle en I donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$OI^2 + IM^2 = OM^2.$$

Comme de plus OIM est isocèle en I :

$$2OI^2 = OM^2$$

ce qui équivaut à

$$OI^2 = \frac{1}{2}OM^2$$

Puisque OI est une longueur nécessairement :

$$\begin{aligned} OI &= \sqrt{\frac{1}{2}OM^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{OM^2} \\ &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{OM^2} \\ &= \frac{\sqrt{1}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \cdot \sqrt{OM^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{OI = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{OM^2}.}$$

2. Puisque OIM est rectangle en I

$$\cos\left(\widehat{IOM}\right) = \frac{OI}{OM}.$$

Donc

$$\boxed{OI = OM \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).}$$

3. Des deux questions précédentes nous déduisons par transitivité

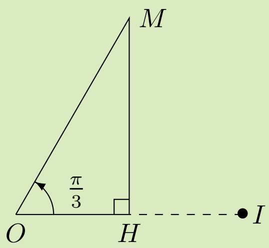
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{OM^2} = OM \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Et puisque OM est une longueur donc un nombre positif :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

Exercice 14.

Soient OHM un triangle rectangle en H tel que $OM = 1$ et $\widehat{HOM} = \frac{\pi}{3}$, I le symétrique de O par rapport à H.



1. (a) Donnez une mesure en degré de $\widehat{HOM}$.
   (b) Justifiez que $OI = 1$.
   (c) Déduisez-en la longueur OH.
2. En utilisant la définition du cosinus vue au collège donnez une égalité liant OH et $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Puis déduisez-en une valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
3. En remarquant que $MH = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, trouvez une expression radicale de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Correction de l'exercice 14

1. (a) Par proportionnalité

2π	$\frac{\pi}{3}$
360	60

$\widehat{IOM}$ mesure 60°.

   (b) Puisque $\widehat{HOM} = 60°$ et puisque I est le symétrique de O par rapport à H, nécessairement $\widehat{MIH} = 60°$.
   Le triangle IOM ayant deux angles dont la mesure est 60° il est donc équilatéral.
   Comme $OM = 1$ finalement

$OI = 1.$

   (c) Puisque I est le symétrique de O par rapport à H :

$$OH = \frac{1}{2}OI.$$

$OH = \frac{1}{2}.$

2. Puisque OHM est rectangle en H

$$\cos\left(\widehat{HOM}\right) = \frac{OH}{OM}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{OH}{1}$$

Donc

$$OH = \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right).$$

En tenant compte du résultat de la question précédente

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{2}.$$

3. La somme des mesures des angles d'un triangle vaut π donc $\widehat{HOM} = \frac{\pi}{6}$.
En utilisant la définition de collège du cosinus nous obtenons bien $MH = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Le triangle OHM est rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore : $HM = \sqrt{\frac{3}{4}}$.
Donc

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le résultat à connaître par cœur est le suivant.

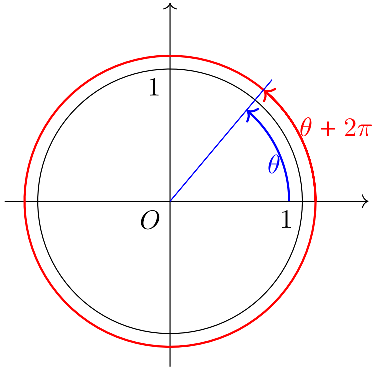
♥

θ (en radian)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

VII Propriétés des sinus et cosinus.

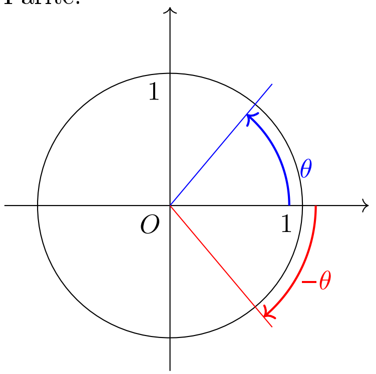
En raisonnant sur le cercle trigonométrique nous retrouvons aisément les formules suivantes.

Périodicité.



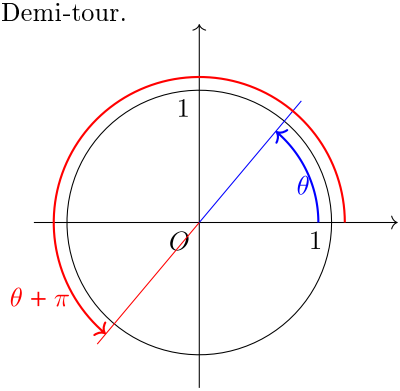
$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$$
$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$$

Parité.



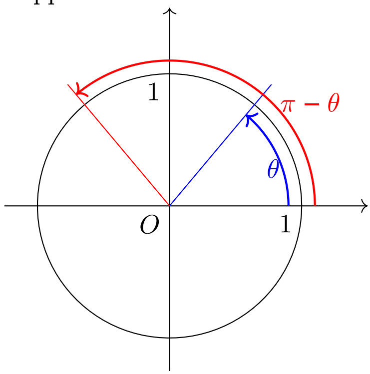
$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Demi-tour.



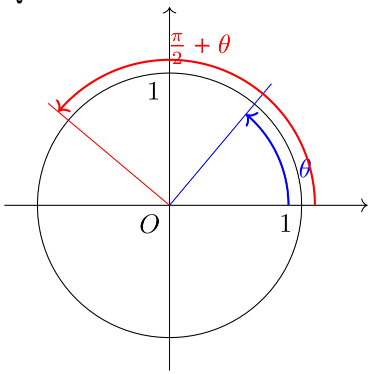
$$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

Supplémentaire.



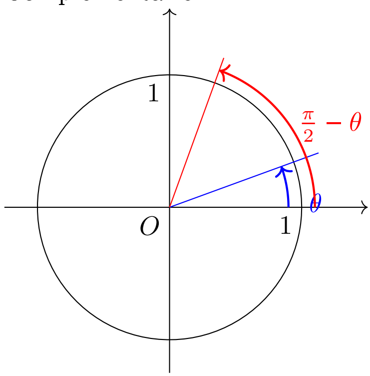
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

Quart de tour.



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$$

Complémentaire.



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$$

Exercice 15.

Déterminez si la fonction f est paire, impaire, périodique.

a) $f(x) = 3\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$.

b) $f(x) = \sin(2x)\cos(x)$.

VIII Dérivées.

La nouvelle définition des sinus et cosinus permet de définir des fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$.

Proposition 5

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\sin' = \cos \quad \text{et} \quad \cos' = -\sin .$$

Corollaire 2

Si $u : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur l'intervalle I alors $\cos(u)$ et $\sin(u)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\cos(u)' = -u' \sin(u) \quad \text{et} \quad \sin(u)' = u' \cos(u).$$

Exercice 16.

Déterminez les dérivées de la fonction f dont l'expression algébrique est donnée ci-après (sans se préoccuper de la dérivabilité).

a) $3\sin(x) - 2\cos(2x)$.

b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos(x)$.

c) $\sin(x)\cos(2x)$.

d) $\sin(2x-1)\cos\left(\frac{3}{4} - 2x\right)$.

e) $x^2 - \cos(x)$.

f) $x - \sin(2x)$.

g) $3\sin(x) - \cos(3x) + 3$.

h) $\sin^2(x)$.

i) $\cos^2(x)$.

j) $x^2\sin(x)$.

k) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

l) $\frac{5}{\cos(x)}$.

m) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

n) $\cos(4x)\sin(-4x)$.

Exercice 17.

On considère un circuit électromagnétique comprenant :

— un condensateur dont la capacité (exprimée en farad) est C,
— une bobine dont l'inductance (exprimée en henry) est L,
— un interrupteur.

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit. On nomme $q(t)$ la valeur de la charge, exprimée en coulomb, du condensateur à l'instant t. On définit ainsi une fonction q, dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

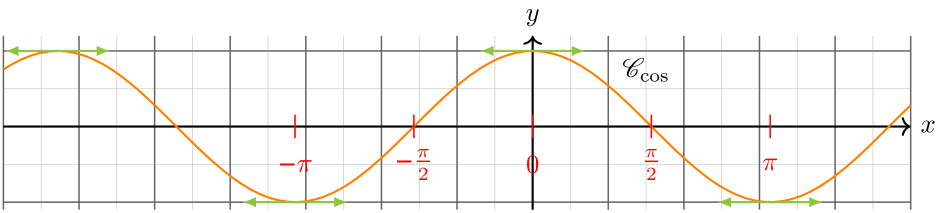
On admet que $q(t) = \dfrac{1}{200}\sin\left(200t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

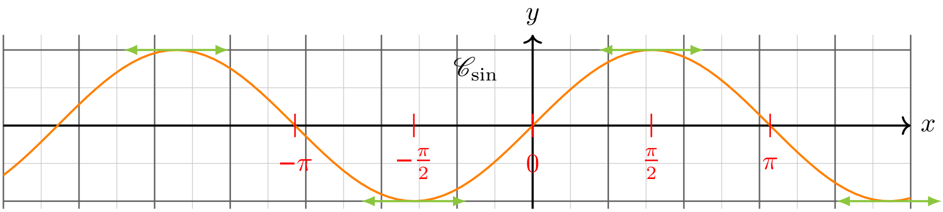
1. Montrez que $T = \frac{\pi}{100}$ est une période de q.
2. Montrez que la fonction q n'est ni paire ni impaire.
3. Calculez la dérivée de la fonction q et dressez son tableau de variation sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{100}\right]$.

Exercice 18.

IX Courbes représentatives.

Tableaux de variations.





X Des formules calculatoires.

Formules d'addition.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(b)\sin(b)$$

Exercice 19.

1. Calculez $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ en utilisant la formule d'addition.
2. De $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ déduisez les valeurs de sinus et de cosinus $\frac{\pi}{12}$.

Correction de l'exercice 19

1. En utilisant $\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$ et $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$.
2.

Formules de linéarisation.

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
$$\cos(x)\sin(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Exercice 20.

Soit s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $s(x) = (-1+\sin(x))(\sin(x)+1)$.

Exercice 21.

Déterminez sans calcul le maximum sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$.