03 Lois binomiales.

I Principes additif et multiplicatif.

1 Principe additif.

2 Produit cartésien d'ensembles.

3 Principe multiplicatif.

4 Vocabulaire ensembliste.

5 Exercices.

Exercice 1.

Soient $A = \{u; w\}$ et $B = \{0; 1\}$.
Donnez une définition en extension de $A \times B$ puis de $B \times A$.

Exercice 2.

1. Dessinez l'ensemble A des points M du plan dont les coordonnées (x, y) dans un repère vérifient les conditions suivantes :
$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 6 \\ 0 \leqslant y \leqslant 12 \end{cases}$$
2. Exprimez A comme un produit cartésien de deux ensembles.
3. Notons B le sous-ensemble des éléments de A à coordonnées entières. Exprimez B comme un produit cartésien de deux ensembles puis donnez en le cardinal.

Exercice 3.

Dans un restaurant le menu propose au choix deux plats et trois desserts.
Combien de menus différents peut-on composer ?

Exercice 4.

Représentez l'ensemble des 3-listes d'éléments de l'ensemble $[\![1, 4]\!]$.

Exercice 5.

Le digicode d'un immeuble est composé des cinq chiffres de 0 à 4 et des lettres A, B et C.

1. Combien de codes à quatre caractères peut-on composer ?
2. Combien de codes à trois chiffres suivis d'une lettre peut-on composer ?

Exercice 6.

1. Combien de 2-listes d'éléments pris $\{0;1\}$ peut-on composer ?
2. Recommencez pour les 3-listes, les 4-listes, les 5-listes.
3. Conjecturez le nombre de n-listes d'éléments pris dans $\{0;1\}$.

Exercice 7.
Combien de mots de $n \in \mathbb{N}$ lettres peut-on formé avec les lettres A et B ?

Exercice 8.
On considère une expérience aléatoire consistant à lancer 8 fois une pièce et à regarder si on obtient pile ou face.
Combien d'issues contient cette expérience ?

Exercice 9.
Déterminez le nombre de sous-ensembles d'un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

II Succession d'épreuves indépendantes.

1 Épreuves indépendantes.

2 "Principe multiplicatif" sur les épreuves indépendantes.

3 Exercices.

Exercice 10.
D'après l'INSEE, 65 % des Français âgés de 15 à 25 ans ont réalisé au moins un achat par Internet en 2011. Nous supposerons que cette proportion se maintient encore quelques années après.
Nous interrogeons au hasard deux jeunes dans la tranche d'âge $15-25$ ans.

1. Modélisez cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculez la probabilité des événements suivants :
   (a) A : « les deux jeunes interrogés ont effectué au moins un achat sur Internet cette année. »
   (b) B : « Un seul des deux jeunes interrogés a effectué au moins un achat sur Internet cette année. »
   (c) C : « Au plus un des deux jeunes interrogés a effectué au moins un achat sur Internet cette année. »

Exercice 11.

Amy a acheté un sac de berlingots. D'après l'étiquette du sac, celui-ci contient 40 % de bonbons à la fraise, 30 % au citron et 30 % à la pomme.
Amy prend au hasard deux berlingots. On considère que le nombre de bonbons est suffisamment grand pour assimiler son choix à des tirages successifs avec remise.
Calculez les probabilités des événements suivants :

- E_1 : « Amy a choisi deux berlingots au citron. »
- E_2 : « Amy a choisi un berlingot à la fraise puis un au citron. »
- E_3 : « Amy a choisi un berlingot à la fraise et un au citron. »
- E_4 : « Amy n'a pas choisi de berlingot à la pomme. »
- E_5 : « Amy a choisi des berlingots de parfums différents. »

Exercice 12.

D'après un sondage BVA effectué en octobre 2013 sur un échantillon représentatif de la population, 73 % des Français âgés de 15 à 34 ans préfèrent se coucher tard plutôt que de se lever tôt.
Trois personnes choisies au hasard dans la tranche d'âge $15 - 34$ ans.
Calculez la probabilité des événements suivants :

- A : « Les trois personnes interrogées préfèrent se coucher tard. »
- B : Exactement deux personnes interrogées sur les trois préfèrent se coucher tard. »
- C : « Au moins une des personnes interrogées préfère se coucher tard. »
- D : « Au plus une des personnes interrogées préfère se coucher tard. »
- E : « Moins de deux personnes interrogées préfèrent se coucher tard. »

Exercice 13.

Sur son trajet domicile-travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores, indépendants les uns des autres. Il a remarqué que, statistiquement, chaque feu est au vert une fois sur trois.

1. Représentez la situation par un arbre pondéré.
2. Pour un trajet domicile-travail, calculez la probabilité des événements suivants.

   (a) Deux feux sur les trois sont au vert.

   (b) Un seul feu sur les trois est au vert.

   (c) Tous les feux sont au vert.

   (d) Aucun des trois feux n'est au vert.

Exercice 14.

Un restaurateur constate qu'au déjeuner, 9 clients sur 10 prennent un café. Quatre clients se présentent pour déjeuner et commandent de façon indépendante. Pour chacun, nous noterons C l'événement « le client prend un café ».

1. Représentez la situation par un arbre pondéré.
2. Calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) Un seul des quatre clients prend un café.
   (b) Au moins deux clients prennent un café.
   (c) Au plus deux clients prennent un café.

Exercice 15.

Un sac contient des boules indiscernables au toucher : 3 vertes, 4 rouges et 3 bleues. On prélève successivement et avec remise deux boules du sac en notant la couleur de chaque boule.

1. Représentez la situation par un arbre pondéré.
2. Calculez la probabilité de l'événement E_1 :« tirer deux boules bleues ».
3. Calculez la probabilité de l'événement E_2 :« tirer au moins une boule bleue ».
4. Calculez la probabilité de l'événement E_3 :« tirer des boules uniquement rouge ou verte ».

Exercice 16.

Un magazine est proposé sous deux versions : papier ou numérique.
L'éditeur délègue à une plateforme d'appels de démarcher une liste de clients potentiels.
Le centre d'appel contacte successivement deux personnes sur cette liste.
On considère les événements suivants.

. A : « la personne contactée s'abonne à la version papier »,

. B :« la personne contactée s'abonne à la version numérique »,

. N :« la personne contacté ne s'abonne pas »

Une étude statistique a montré que

. la probabilité qu'une personne s'abonne à la version papier est de $0,18$;

. la probabilité qu'une personne s'abonne à la version numérique est de $0,22$;

. la probabilité qu'une personne ne s'abonne à aucune des deux versions est de $0,7$.

On étudie ce qu'il peut se passer lorsque la plateforme contact deux personnes.
Calculez les probabilité des événements suivants.

1. E_1 :« Les deux personnes contactées ont choisi un abonnement numérique. »
2. E_2 : « au moins l'une des deux personnes a choisi un abonnement numérique »
3. E_3 :« au moins l'une des deux personnes a choisi un abonnement papier »
4. E_4 : « l'une des personnes contactées a choisi un abonnement papier et l'autre un abonnement numérique »
5. E_5 :« au moins l'une des deux personnes s'est abonnée »

Exercice 17.

Le supermarché Rond-Point organise des ventes promotionnelles "flash". Les clients ont quelques minutes pour profiter des promotions.

Lors d'une de ces ventes un ensemble d'ustensiles de salle de bain composé :
- d'une serviette de bain (**G**rande ou **P**etite),
- d'un gant de toilette (**V**ert, **R**ouge ou **J**aune) et
- d'un rideau de douche (**B**lanc ou **T**ransparent)

est proposé.

Chaque client prend exactement un gant de toilette, une serviette de bain puis un rideau de douche.

1. Dessinez un arbre rendant compte de cette situation.
2. Inquiet de manquer l'offre promotionnelle, un client prend au hasard un gant de toilette, une serviette de bain puis un rideau de douche. Quelle est la probabilité que ce client prenne une grande serviette (**G**), un gant rouge (**R**) et un rideau blanc (**B**) ?
3. On note A l'événement : « le client prend un gant de toilette jaune ». Énumérer les issues qui réalisent A. En déduire la probabilité de A.
4. Calculer la probabilité qu'un client prenne un gant de toilette **V**ert ou **R**ouge.
5. On note B l'événement « le client prend un rideau de douche blanc ». Énumérer les issues qui réalisent B. En déduire la probabilité de B.
6. Déterminer la probabilité que le client prenne une petite serviette et un rideau de douche blanc.
7. Décrire l'événement $A \cup B$ par une phrase puis calculer la probabilité de $A \cup B$.

Exercice 18.

Un examen consiste à passer 3 épreuves indépendantes.

- Épreuve 1 : on a 80 % de chances de réussir.
- Épreuve 2 : on a 60 % de chances de réussir.
- Épreuve 3 : on a 25 % de chances de réussir.

On est reçu à l'examen si on réussi au moins deux épreuves sur trois.
Quelle est la probabilité de réussir l'examen ?

Exercice 19.

III Listes, permutations, combinaisons.

1 Arrangements.

2 Permutations.

3 Combinaisons.

4 Formule du binôme de Newton.

5 Exercices.

Exercice 20.

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \binom{n}{n-1} = n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = (n+1)n!$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n}$.

Exercice 21.

Une urne contient quatre boules blanches et trois boules noires On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles ne comportant que des boules blanches ?
3. Combien y a-t-il de tirages unicolores ?
4. Combien y a-t-il de tirages comportant une boule blanche et deux boules noires ?

Exercice 22.

On choisit au hasard simultanément quatre cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles comportant le roi de cœur ?
3. Combien y a-t-il de tirages comportant quatre cœurs ?
4. Combien y a-t-il de tirages ne comportant aucun as ?

Exercice 23.

Le code d'une carte de crédit est formé de quatre chiffres distincts.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes ne comportant que des chiffres pairs ?
3. Combien y a-t-il de codes commençant par le chiffre 2 ?

Exercice 24.

Un numéro de téléphone est constitué de 10 chiffres dont le premier est 0 et les neuf autres quelconques.

1. Combien y a-t-il de numéros possibles ?
2. Combien y a-t-il de numéros possibles commençant par 06 ?
3. Calculez le nombre de numéros contenant
   (a) les dix chiffres,
   (b) exactement 3 fois le chiffre 6.

Exercice 25.

Un code est formé d'une lettre suivie de trois chiffres.

1. Combien y a-t-il de chiffres possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes commençant par la lettre A ?
3. Combien y a-t-il de codes commençant par A et contenant les chiffres 1, 2 et 3 ?

Exercice 26.

Un fleuriste dispose de 5 roses, trois tulipes, deux tournesols et quatre feuillages décoratifs pour composer un bouquet.

1. Combien de bouquets constitués de trois fleurs et d'un feuillage peut-il composer ?
2. Il décide de mettre une fleur de chaque espèce avec un feuillage pour constituer son bouquet. Quel est le nombre de bouquets possibles ?

Exercice 27.

Lors d'une course hippique on peut parier sur les cinq premiers chevaux à l'arrivée. On parle alors de quinté. 15 chevaux, numérotés de 1 à 15, sont au départ. Combien y a-t-il de quintés différents :

1. en tenant compte de l'ordre ?
2. sans tenir compte de l'ordre ?

Exercice 28.

Une urne contient 100 jetons numérotés de 1 à 100. On tire simultanément deux jetons de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possible ?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux numéros pairs ?
3. Parmi les événements suivants, quel est le plus probable ?
   (a) A : « la somme des numéros est paire »,
   (b) B : « la somme des numéros est impaire ».

Exercice 29.

Combien peut-on former de mots de 5 lettres

1. comportant des lettres différentes ?
2. commençant par une voyelle et finissant par une consonne ?
3. contenant exactement une voyelle ?

Exercice 30.

Démontrez que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

Exercice 31.

Démontrez $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

Exercice 32.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \mapsto (1+x)^n$.

1. Calculez f' à partir de l'expression factorisée de f puis à partir de son expression développée.
2. Démontrez
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}.$$

Exercice 33.

Soit n un entier naturel.
Une urne contient n boules rouges et n boules vertes. On tire les boules de l'urne les unes après les autres jusqu'à ce que l'urne soit vide, en notant au fur et à mesure la couleur de la boule tirée : R pour rouge et V pour verte.

1. (a) Faire le lien entre le résultat obtenu et l'ensemble $E = \{R, V\}$.
   (b) Montrez que le nombre de ces $2n$-uplets est $\binom{2n}{n}$.
2. Considérons un jeu. On gagne 1 € à chaque tirage d'une boule de couleur différente de la boule précédemment tirée ; sinon on ne gagne rien. La partie est finie lorsque l'urne est vide.
   (a) Calculez la probabilité de gagner exactement 1 € lors d'une partie.
   (b) Calculer la probabilité de gagner 2 € lors d'une partie.
   (c) Soit k un entier naturel tel que $2 \leqslant k \leqslant 2n$.
   Calculez, en fonction de n, la probabilité de gagner au k-ième tirage.
   Cette probabilité dépend-elle du rang k ?

Exercice 34.

1. Un sac contient contient 5 boules indiscernables sur lesquelles sont écrites les lettre A, B, C, D et E.

   On tire une boule au hasard, on note la lettre, et on remet la boule dans l'urne. On répète trois fois cette action. On obtient ainsi un mot de trois lettres.

   À l'aides des coefficients binomiaux écrivez :

   (a) le nombre de mots que l'on peut obtenir ayant trois lettres différentes, sans tenir compte de l'ordre ;

   (b) le nombre de mots que l'on peut obtenir ayant deux lettres différentes et une lettre commune ;

   (c) le nombre de mots que l'on peut obtenir ayant trois lettres différentes.

2. Dans une combinaison avec combinaison de k objets pris parmi n objets distincts, un même objet peut être sélectionné plusieurs fois. On veut montrer que ce nombre de combinaison est égale à $\binom{n+k-1}{k}$.
   On symbolise les k objets par une ligne de O. Un répartition avec n objets distincts consiste alors à mettre des barres de séparation ente les objets. Le nombre de O entre deux barres signifie le nombre de fois qu'un même objet a été sélectionné.
   Par exemple avec $k = 8$ et $n = 5$:

$$OOO||OO|OO|O$$

$$O|OOO|O|OO|O$$

$$OO|O|OOO||OO$$

   Deux barres côte à côte signifie qu'il y a zéro objets d'un certain type.

   (a) Dans chacun des trois exemples ci-dessus, quel est le nombre total de symboles (barres et O) utilisés et quel est le nombre de barres ?

   Quelle conjecture peut-on donc faire sur le nombre de combinaisons avec répétitions de huit objets parmi cinq ?

   (b) On admet que le problème se ramène donc au choix de $n-1$ objets parmi $n+k-1$.
   Justifiez l'égalité $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$.

3. Quatre amies se rendent dans un salon de thé où huit thés différents sont proposés. Combien de plateaux de quatre tasses de thés, différentes ou non, pourra leur amener le serveur ?

Exercice 35. - Formule de Leibniz

La fonction dérivée d'une fonction f est notée f'. La dérivée de la fonction dérivée, notée f'' ou $f^{(2)}$, est appelée la *dérivée seconde* ou *dérivée d'ordre* 2.
Nous définirons plus généralement le *fonction dérivée d'ordre* n (n entier naturel) d'une fonction la fonction obtenue en dérivant n fois la fonction f et nous la noterons $f^{(n)}$.

Soient u et v des fonctions indéfiniment dérivables.
Déterminez la dérivée d'ordre n de la fonction produit uv.

Exercice 36.

Montrez :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall r \in [\![1, n]\!], \ \binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}.$$

Exercice 37.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right)$.

1. Que valent $P_n(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-n)$?
2. Démontrez que pour tout réel non nul x, on a
$$P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1).$$
3. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, écrire $P_n(p)$ comme coefficient du binôme.

Exercice 38.

Soit $(p, q) \in]0, 1[^2$ tel que $p + q = 1$.
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \prod_{k=0}^{n} \exp\left(\binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right)$.

1. Déterminez $\ln(A_n)$.
2. Déduisez-en A_n pour $n \in \mathbb{N}$.

IV Épreuve et schéma de Bernoulli.

1 Épreuve de Bernoulli.

2 Schéma de Bernoulli.

3 Exercices.

Exercice 39.

Dites si les expériences aléatoires suivantes sont des épreuves de Bernoulli.

1. Un stock contient 1 % de pièces défectueuses. On y prélève une pièce et on regarde sil elle présente un défaut.
2. Selon l'INSEE, 45 % des familles françaises ont un seul enfant, 38 % en ont deux et 17 % en ont trois ou plus. On intérroge au hasard un élève et on lui demande le nombre d'enfants dans sa famille.

Exercice 40.

Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, dites si elle constitue un schéma de Bernoulli. Si oui donnez n et p.

1. Dans un stock de 20 vis, dont 3 sont trop longues, on prélève successivement 15 vis, au hasard et sans remise. Pour chacune on regarde si elle est trop longue ou non.
2. On considère une suite de 50 lettres choisies de façon aléatoire. Pour chacune d'entre elles, on regarde si elle est une voyelle ou non.

Exercice 41.

Une chaîne de magasins de bricolage commercialise des ponceuses « elliptiques ».
Statistiquement 8 % des ponceuses du stock sont défectueuses.
On prélève au hasard 25 ponceuses elliptiques dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
Démontrez que cette situation est un schéma de Bernoulli dont vous préciserez les paramètres.

V Loi binomiale.

1 Loi de Bernoulli.

2 Moments d'une loi de Bernoulli.

3 Variable aléatoire suivant une loi binomiale.

4 Calcul de probabilité pour une loi binomiale.

5 Calcul de probabilité ou de fonction de répartition avec la calculatrice.

6 Moments d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

7 Exercices.

Exercice 42. C

Une entreprise fabrique des assiettes. On sait que 6 % des assiettes produites présentent un défaut. On choisit une assiette au hasard. Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'assiette ne présente pas de défaut et 0 sinon.

1. Quelle loi suit X ?
2. Donnez le paramètre de cette loi.
3. Calculez $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 43.

Dans un stock de ballons de foot contenant 70 % de ballons bicolores, on prélève 12 ballons au hasard, successivement et avec remise.
X donne le nombre de ballons bicolores obtenus.
Justifiez que X suit une loi binomiale.

Exercice 44.

Dites si la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Si oui précisez-en les paramètres.

1. Dans un supermarché, 20 % des clients du samedi ont un caddie inférieur à 100 €.

   On choisit au hasard 15 clients un samedi. X donne le nombre de clients dont le caddie est inférieur à 100 €.
2. On lance cinq fois de suite une pièce bien équilibrée. X donne le rang du 1^er pile obtenu (X prend la valeur 6 si on a pas obtenu de pile sur les 5 lancers).

Exercice 45.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,1$.
Donnez une valeur approchée de $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X = 3)$ et $\mathbb{P}(X = 4)$.

Exercice 46.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{3}{4}$.

1. Donnez une valeur approchée de $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = 2)$.
2. Déduisez-en $\mathbb{P}(X \geqslant 3)$.

Exercice 47.

D'après l'INSEE, la proportion de Français de moins de 20 ans est restée stable à $24,6$ % entre 2012 et 2014. On suppose que cette proportion se maintient pendant quelques années.
On interroge au hasard 12 Français et on note X la variable aléatoire donnant le nombre d'entre eux qui sont âgés de moins de 20 ans.

1. Justifiez que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculez les probabilités des événements suivants.
   (a) 10 personnes interrogées ont moins de 20 ans.
   (b) Au plus 8 personnes interrogées ont moins de 20 ans.
   (c) Au moins 4 personnes interrogées ont moins de 20 ans.
3. Quel est le nombre le plus probable de personnes ayant moins de 20 ans ?

Exercice 48.

18 % des Français âgés de plus de 15 ans ont fréquentés au moins une fois une bibliothèque en 2008.
On suppose que cette proportion se maintient pendant les années qui suivent et on interroge au hasard 30 Français âgés de plus de 15 ans. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'entre eux qui ont fréquenté une bibliothèque dans l'année.

1. Justifiez que X suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.
2. Calculez la probabilité des événements suivants :

   a) $\mathbb{P}(X = 10)$, b) $\mathbb{P}(X \leqslant 5)$, c) $\mathbb{P}(X > 8)$.

   Traduisez chaque résultat par une phrase dans le contexte de l'exercice.
3. Quel est le nombre le plus probable de personnes ayant fréquenté une bibliothèque dans l'année ?

Exercice 49.

Un fumeur est dit « fumeur régulier » s'il fume au moins une cigarette par jour. En 2010, en France, la proportion de fumeurs réguliers âgés de 15 à 19 ans, était de $23,6$ %.
On choisit au hasard, et de manière indépendante, quinze jeunes âgés de 15 à 19 ans.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de fumeurs réguliers parmi ces quinze jeunes.

1. Précisez la loi de probabilité de X.
2. Déterminez les probabilités des événements suivants, en arrondissant à $0,001$ près.
   (a) Deux des jeunes interrogés sont des fumeurs réguliers.
   (b) Aucun des jeunes interrogés n'est un fumeur régulier.
   (c) Moins de cinq jeunes interrogés sont des fumeurs réguliers.
   (d) Plus d'un jeune interrogé est un fumeur régulier.

Exercice 50.

Un fabricant vend des stylos par lot de 10. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de stylos défectueux dans un lot. On admet que X suit une loi binomiale de paramètres 10 et $0,034$.
On donnera les résultats à 10^{-3} près.

1. Quelle est la probabilité que le lot contienne au moins un stylo défectueux ?
2. Quelle est la probabilité que le lot contienne au moins deux stylos défectueux ?

Exercice 51.

On lance simultanément deux dés à six faces parfaitement équilibrés.

1. Quelle est la probabilité de faire un double 6 ?
2. On lance 10 fois de suite cette paire de dés.
   Quelle est la probabilité de faire au moins trois double 6 lors de ces 10 parties ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

Exercice 52.

Une association organise une tombola et vend un très grand nombre de tickets à gratter ? On suppose que deux tickets sur dix sont gagnants.
Une personne achète au hasard vingt tickets.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tickets gagnants.

1. Donnez la loi de probabilité de X.
2. Sans justification donnez la valeur de k telle que $\mathbb{P}(X = k)$ soit maximale. Interprétez ce résultat.
3. Calculez l'espérance de X. Interprétez.

Exercice 53.

Un basketteur s'entraîne à tirer des lancers francs. On suppose que, quel que soit le résultat des tirs précédents, la probabilité qu'il réussisse est égale à $0,8$. Il effectue une série de 30 tirs. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où il réussit son tir.

1. Déterminez la loi de probabilité de X.
2. Calculez la probabilité que le basketteur
   (a) réussisse 18 tir exactement,
   (b) réussisse moins de 15 tirs,
   (c) réussisse au moins 20 tirs.
3. Déterminez le nombre moyen de tirs réussis.

Exercice 54.

On joue à pile ou face cinq fois de suite. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de fois où on a obtenu face.

1. Quelle loi suit X ? Donnez ses paramètres.

Pour jouer à ce jeu, il faut payer 3 €. On gagne 1 € à chaque fois qu'on obtient face lors d'un des cinq lancers.
On note Y la variable aléatoire représentant le gain (ou la perte) totale lors de ce jeu.

2. Exprimez Y en fonction de X.
3. Déduisez-en $\mathbb{E}(Y)$.
4. Ce jeu est-il financièrement intéressant ?
5. Quelle somme aurait-il fallu payer au départ pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 55.

Un tireur à l'arc atteint sa cible neuf fois sur dix. Ce tireur participe à un concours primé.
Il tire 5 flèches sur la cible. Pour chaque flèche, s'il atteint la cible, il gagne 10 € , sinon il perd 20 €. On suppose que les tirs sont indépendants.

1. On appelle X le nombre de flèches ayant atteint la cible à l'issue des cinq tirs.
   (a) Montrer que X suit une loi binomiale dont précisera les paramètres.
   (b) Déterminez la probabilité d'atteindre au moins 2 fois la cible.
2. On appelle Y la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue des cinq tirs.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
   (b) Déterminez la loi de Y.
   (c) Quel est le gain moyen (positif ou négatif) du tireur s'il participe un grand nombre de fois à ce concours ? Est-ce intéressant pour lui ?

Exercice 56. - BAC

— Centres étrangers groupe I sujet 1 13 mars 2023. Arbre, suite, binomiale.
— Polynésie sujet 2 14 mars 2023. Arbre, suite, binomiale.