03 Lois binomiales.

I Principes additif et multiplicatif.

Nous ne considérerons que des ensembles contenant un nombre fini d'éléments.

1 Principe additif.

Le nombre d'éléments contenus dans un ensemble A est noté $|A|$ et est appelé le *cardinal de A*.

Si A et B sont disjoints (intersection vide, pas d'élément en commun) alors $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Nous retrouvons des résultats semblables à ceux des probabilités (formule du crible).

Par exemple, si $A = \{2; 6\}$ et $B = \{1; -3; 4\}$ alors, $|A| = 2$ et $|B| = 3$, et puisqu'ils sont disjoints, $|A \cup B| = 2 + 3 = 5$.

2 Produit cartésien d'ensembles.

On appelle couple la donnée de deux éléments dans un ordre fixe comme par exemple des coordonnées. Ainsi $(2; 3)$ est un couple qui est différent du couple $(3; 2)$.

Si E et F sont deux ensembles alors l'ensemble des couples formés d'un élément de E puis d'un élément de F est appelé le *produit cartésien* de E et F et est noté $E \times F$.

Par exemple, $(2; 5)$ et $(3; a)$ sont des éléments du produit cartésien $\{2; 5; 7\} \times \{3; a\}$ alors que $(3; a)$, $(3; 7)$ et $(1; 13)$ n'en sont pas.

On généralise la notion de couple à plus de deux éléments sous le nom de *k-liste* ou de *k-uplet*, k désignant un entier naturel non nul. Ainsi $(-2; 4; 7)$ est une 3-liste qui appartient au produit cartésien $]-4; -1] \times \mathbb{R} \times [5; 10]$.

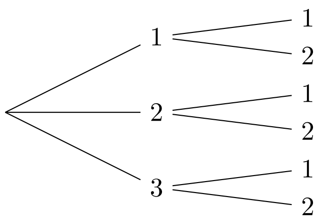
Lorsqu'on regarde les couples de nombres réels on travail dans le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et dans ce cas on simplifie la notation (en cohérence avec nos habitudes) en écrivant $\mathbb{R}^2$. On peut de même écrire $\mathbb{R}^3$ ou $[0; 1]^5$ ou $\{0; 1\}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

3 Principe multiplicatif.

Une notation à connaître : l'ensemble des entiers compris (au sens large) entre deux entiers a et b avec $a \leqslant b$ est noté $[\![a, b]\!]$. Par exemple $[\![-2, 1]\!] = \{-2, -1, 0, 1\}$.

Nous souhaitons connaître le nombre de couples que contient un produit cartésien $E \times F$, E et F étant des ensembles finis.

Conjecturons la réponse à partir d'un exemple : $E = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ et $F = \llbracket 1, 2 \rrbracket$. Pour fabriquer un couple de $E \times F$ il faut d'abord choisir un nombre das $E = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ puis un nombre dans $F = \llbracket 1, 2 \rrbracket$. Le fait de choisir fait penser aux probabilités. Représentons tous les choix possibles par un arbre.



Chaque branche du premier niveau conduit à deux nouvelles branches donc il y a $3 \times 2 = 6$ chemins, et donc 6 couples possibles. C'est le principe multiplicatif.

Nous noterons $|E|$ le cardinal de E (la taille de E).

Proposition 1 - Principe multiplicatif.

Soient E et F des ensembles de cardinaux finis.

$$|E \times F| = |E| \times |F|.$$

4 Vocabulaire ensembliste.

Un ensemble est une collection d'objets distincts deux à deux. On dit qu'on définit un ensemble en extension lorsqu'on en énumère les issues. Par exemple $\{0; 1; 2\}$ et $\{0; 1; 2; \ldots\}$ sont donnés en extension.

Une *partie* F, ou *sous-ensemble*, d'un ensemble E est un ensemble dont tous les éléments sont aussi dans E. On écrit $F \subset E$.

5 Exercices.

Exercice 1.

Soients $A = \{u; w\}$ et $B = \{0; 1\}$.
Donnez une définition en extension de $A \times B$ puis de $B \times A$.

Exercice 2.

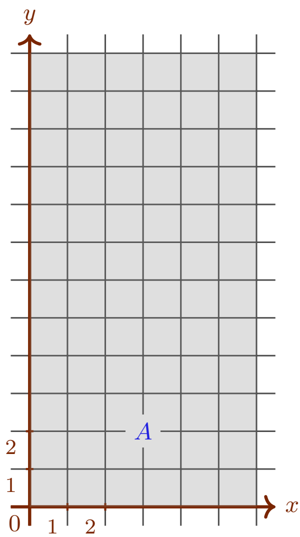
1. Dessinez l'ensemble A des points M du plan dont les coordonnées (x,y) dans un repère vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 6 \\ 0 \leqslant y \leqslant 12 \end{cases}$$

2. Exprimez A comme un produit cartésien de deux ensembles.
3. Notons B le sous-ensemble des éléments de A à coordonnées entières. Exprimez B comme un produit cartésien de deux ensembles puis donnez en le cardinal.

Correction de l'exercice 2

1.



2. $A = [0;6] \times [0;12]$.
3. $B = [\![0,6]\!] \times [\![0;12]\!]$.
D'après le principe multiplicatif : $|B| = |[\![0,6]\!]| \times |[\![0;12]\!]| = 7 \times 13 = 91$.

Exercice 3.

Dans un restaurant le menu propose au choix deux plats et trois desserts.
Combien de menus différents peut-on composer ?

Correction de l'exercice 3

$2 \times 3 = 6$.

Exercice 4.

Représentez l'ensemble des 3-listes d'éléments de l'ensemble $[\![1, 4]\!]$.

Correction de l'exercice 4

$[\![1, 4]\!]^3$.

Exercice 5.

Le digicode d'un immeuble est composé des cinq chiffres de 0 à 4 et des lettres A, B et C.

1. Combien de codes à quatre caractères peut-on composer ?
2. Combien de codes à trois chiffres suivis d'une lettre peut-on composer ?

Correction de l'exercice 5

1. $|\{0; 1; 2.3; 4; A; B; C\}^4| = |\{0; 1; 2.3; 4; A; B; C\}|^4 = 8^4$.
2. $|\{[\![0, 4]\!]^3 \times \{A, B, C\}| = |\{[\![0, 4]\!]|^3 \times |\{A, B, C\}| = 5^3 \times 3$.

Exercice 6.

1. Combien de 2-listes d'éléments pris $\{0; 1\}$ peut-on composer ?
2. Recommencez pour les 3-listes, les 4-listes, les 5-listes.
3. Conjecturez le nombre de n-listes d'éléments pris dans $\{0; 1\}$.

Correction de l'exercice 6

L'ensemble des n-listes d'éléments de $\{0; 1\}$ est $\{0; 1\}^n$ et son cardinal est 2^n.

Exercice 7.

Combien de mots de $n \in \mathbb{N}$ lettres peut-on formé avec les lettres A et B ?

Correction de l'exercice 7

2^N.

Exercice 8.

On considère une expérience aléatoire consistant à lancer 8 fois une pièce et à regarder si on obtient pile ou face.
Combien d'issues contient cette expérience ?

Correction de l'exercice 8

2^8.

Exercice 9.

Déterminez le nombre de sous-ensembles d'un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 9

Il y a 2^n sous-ensembles.

II Succession d'épreuves indépendantes.

1 Épreuves indépendantes.

On appelle épreuve une expérience aléatoire qui participe d'une expérience aléatoire plus complexe. Par exemple si une expérience consiste à lancer une pièce jusqu'à obtenir un pile, chaque lancé de pièce constitue une épreuve.

On dit que des épreuves sont *indépendantes* si les résultats (issues et probabilités) de l'une ne dépendent pas des résultats (issues et probabilités) de l'autre.
Considérons un exemple : on lance une pièce puis on lance un dé à 6 faces. Une issue est donc un élément de $\Omega = \{P, F\} \times [\![1, 6]\!]$.

Si une expérience est une succession de n épreuves indépendantes d'univers $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ alors son univers est le produit cartésien $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$.
Autrement dit les issues de l'expérience sont des n-listes $(i_1, \ldots, i_n)$ où $i_1, \ldots, i_n$ sont des issues des n épreuves.

2 "Principe multiplicatif" sur les épreuves indépendantes.

Si $(i_1, \ldots, i_n)$ est une issue d'une succession de n épreuves indépendantes, alors la probabilité de $(i_1, \ldots, i_n)$ est le produit des probabilités de chacune des issues i_1,...,i_n.
En reprenant l'exemple de la pièce puis du dé : $\mathbb{P}((P, 3)) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

3 Exercices.

Exercice 10.

D'après l'INSEE, 65 % des Français âgés de 15 à 25 ans ont réalisé au moins un achat par Internet en 2011. Nous supposerons que cette proportion se maintient encore quelques années après.
Nous interrogeons au hasard deux jeunes dans la tranche d'âge $15 - 25$ ans.

1. Modélisez cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculez la probabilité des événements suivants :
   (a) A : « les deux jeunes interrogés ont effectué au moins un achat sur Internet cette année. »
   (b) B : « Un seul des deux jeunes interrogés a effectué au moins un achat sur Internet cette année. »
   (c) C : « Au plus un des deux jeunes interrogés a effectué au moins un achat sur Internet cette année. »

Exercice 11.

Amy a acheté un sac de berlingots. D'après l'étiquette du sac, celui-ci contient 40 % de bonbons à la fraise, 30 % au citron et 30 % à la pomme.
Amy prend au hasard deux berlingots. On considère que le nombre de bonbons est suffisamment grand pour assimiler son choix à des tirages successifs avec remise.
Calculez les probabilités des événements suivants :

- E_1 : « Amy a choisi deux berlingots au citron. »
- E_2 : « Amy a choisi un berlingot à la fraise puis un au citron. »
- E_3 : « Amy a choisi un berlingot à la fraise et un au citron. »
- E_4 : « Amy n'a pas choisi de berlingot à la pomme. »
- E_5 : « Amy a choisi des berlingots de parfums différents. »

Exercice 12.

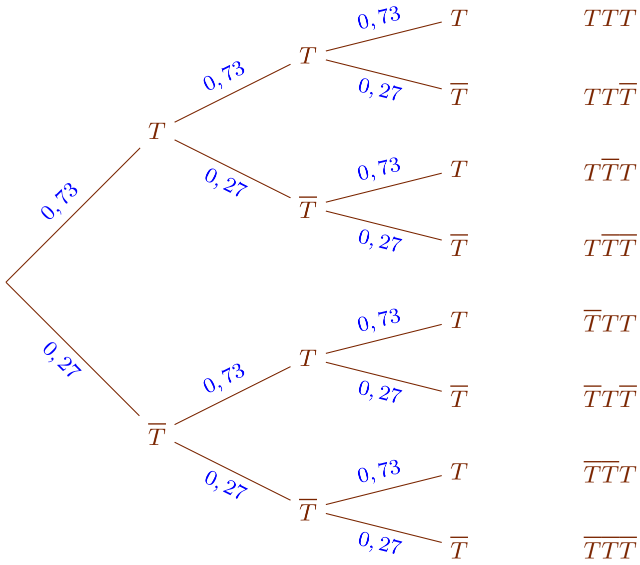
D'après un sondage BVA effectué en octobre 2013 sur un échantillon représentatif de la population, 73 % des Français âgés de 15 à 34 ans préfèrent se coucher tard plutôt que de se lever tôt.
Trois personnes choisies au hasard dans la tranche d'âge $15 - 34$ ans.
Calculez la probabilité des événements suivants :

- A : « Les trois personnes interrogées préfèrent se coucher tard. »
- B : Exactement deux personnes interrogées sur les trois préfèrent se coucher tard. »
- C : « Au moins une des personnes interrogées préfère se coucher tard. »
- D : « Au plus une des personnes interrogées préfère se coucher tard. »
- E : « Moins de deux personnes interrogées préfèrent se coucher tard. »

Correction de l'exercice 12

Construisons l'arbre pondéré correspondant à l'expérience.

Notons T le fait qu'une personne préfère se coucher tard et donc $\overline{T}$ sinon.



1. Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   $A = \{TTT\}$.
   Donc

   $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(LLL)$$

   D'après le principe multiplicatif :

   $$= 0,73 \times 0,73 \times 0,73$$

   Finalement :

   $$\boxed{\mathbb{P}(A) \approx 0,389}$$

2. Calculons $\mathbb{P}(B)$.

   $B = \left\{TT\overline{T}; T\overline{T}T; \overline{T}TT\right\}$.
   Donc

   $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(TT\overline{T}) + \mathbb{P}(T\overline{T}T) + \mathbb{P}\mathbb{P}(\overline{T}TT)$$

   D'après le principe multiplicatif :

   $$= 0,73 \times 0,73 \times 0,27 + 0,73 \times 0,27 \times 0,73 + 0,27 \times 0,73 \times 0,73$$

   Finalement :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) \approx 0,1439}$$

3. Calculons $\mathbb{P}(C)$.

   Le nombre de chemins correspondant à l'événement B étant très important il est ici intéressant, mais pas indispensable, de considérer l'événement contraire.

   $\overline{C}$: « Aucune des trois personnes interrogées n'aime se coucher tard. »
   $\overline{C} = \left\{\overline{TTT}\right\}$.
   Donc

   $$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\overline{TTT})$$

   D'après le principe multiplicatif :

   $$= 0,27 \times 0,27 \times 0,27$$

   Nous en déduisons la probabilité de C :

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{C}) \\ &= 1 - 0,27 \times 0,27 - 0,27\end{aligned}$$

   Finalement :

   $$\boxed{\mathbb{P}(C) \approx 0,9803}$$

4. Calculons $\mathbb{P}(D)$.

   D : « Aucune ou une seule des trois personnes aime se coucher tard ».

   $D = \left\{T\overline{T}\overline{T}; \overline{T}T\overline{T}; \overline{T}\overline{T}T; \overline{T}\overline{T}\overline{T}\right\}$.
   Donc

   $$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(T\overline{T}\overline{T}) + \mathbb{P}(\overline{T}T\overline{T}) + \mathbb{P}(\overline{T}\overline{T}T) + \mathbb{P}(\overline{T}\overline{T}\overline{T})$$

   D'après le principe multiplicatif :

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) = \ & 0,73 \times 0,27 \times 0,27 + 0,27 \times 0,73 \times 0,27 + 0,27 \times 0,27 \times 0,73 \\ & + 0,27 \times 0,27 \times 0,27\end{aligned}$$

   Finalement :

   $$\boxed{\mathbb{P}(D) \approx 0,1793}$$

5. Calculons $\mathbb{P}(E)$.

   Nous remarquons que $E = \overline{A}$.
   Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(\overline{A}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A) \\ &= 1 - 0,73^3\end{aligned}$$

   D'où

$$\boxed{\mathbb{P}(E) \approx 0,6110}$$

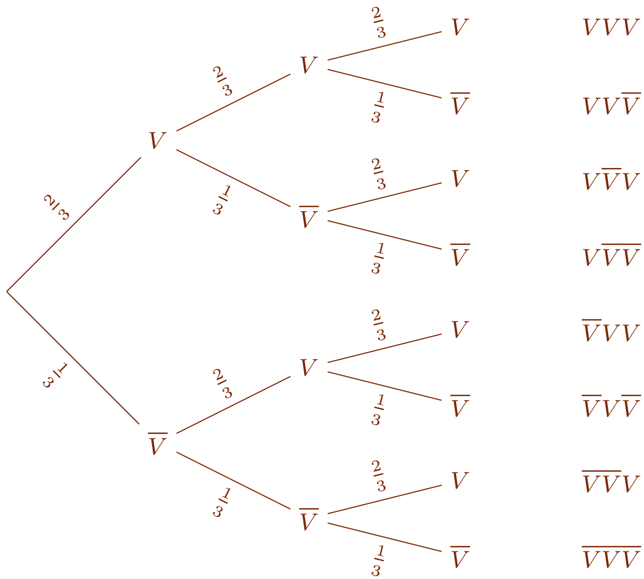
Exercice 13.

Sur son trajet domicile-travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores, indépendants les uns des autres. Il a remarqué que, statistiquement, chaque feu est au vert une fois sur trois.

1. Représentez la situation par un arbre pondéré.
2. Pour un trajet domicile-travail, calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) Deux feux sur les trois sont au vert.
   (b) Un seul feu sur les trois est au vert.
   (c) Tous les feux sont au vert.
   (d) Aucun des trois feux n'est au vert.

Correction de l'exercice 13

1.



2. (a) Notons E_1 l'événement « Deux feux sur les trois sont au vert ».

Calculons $\mathbb{P}(E_1)$.

En lisant les chemins sur l'arbre :
$E_1 = \{VV\overline{V};\ V\overline{V}V;\ \overline{V}VV\}$.
Donc du point de vue probabiliste :

$$\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(VV\overline{V}) + \mathbb{P}(V\overline{V}V) + \mathbb{P}(\overline{V}VV)$$

Donc, d'après le principe multiplicatif :

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_1) = \frac{4}{9}.}$$

Exercice 14.

Un restaurateur constate qu'au déjeuner, 9 clients sur 10 prennent un café. Quatre clients se présentent pour déjeuner et commandent de façon indépendante. Pour chacun, nous noterons C l'événement « le client prend un café ».

1. Représentez la situation par un arbre pondéré.
2. Calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) Un seul des quatre clients prend un café.
   (b) Au moins deux clients prennent un café.
   (c) Au plus deux clients prennent un café.

Exercice 15.

Un sac contient des boules indiscernables au toucher : 3 vertes, 4 rouges et 3 bleues. On prélève successivement et avec remise deux boules du sac en notant la couleur de chaque boule.

1. Représentez la situation par un arbre pondéré.
2. Calculez la probabilité de l'événement E_1 :« tirer deux boules bleues ».
3. Calculez la probabilité de l'événement E_2 :« tirer au moins une boule bleue ».
4. Calculez la probabilité de l'événement E_3 :« tirer des boules uniquement rouge ou verte ».

Exercice 16.

Un magazine est proposé sous deux versions : papier ou numérique.
L'éditeur délègue à une plateforme d'appels de démarcher une liste de clients potentiels.
Le centre d'appel contacte successivement deux personnes sur cette liste.
On considère les événements suivants.

. A : « la personne contactée s'abonne à la version papier »,

. B :« la personne contactée s'abonne à la version numérique »,

. N :« la personne contacté ne s'abonne pas »

Une étude statistique a montré que

. la probabilité qu'une personne s'abonne à la version papier est de $0,18$;

. la probabilité qu'une personne s'abonne à la version numérique est de $0,22$;

. la probabilité qu'une personne ne s'abonne à aucune des deux versions est de $0,7$.

On étudie ce qu'il peut se passer lorsque la plateforme contact deux personnes.
Calculez les probabilité des événements suivants.

1. E_1 :« Les deux personnes contactées ont choisi un abonnement numérique. »
2. E_2 : « au moins l'une des deux personnes a choisi un abonnement numérique »
3. E_3 :« au moins l'une des deux personnes a choisi un abonnement papier »
4. E_4 : « l'une des personnes contactées a choisi un abonnement papier et l'autre un abonnement numérique »
5. E_5 :« au moins l'une des deux personnes s'est abonnée »

Exercice 17.

Le supermarché Rond-Point organise des ventes promotionnelles "flash". Les clients ont quelques minutes pour profiter des promotions.

Lors d'une de ces ventes un ensemble d'ustensiles de salle de bain composé :
- d'une serviette de bain (**G**rande ou **P**etite),
- d'un gant de toilette (**V**ert, **R**ouge ou **J**aune) et
- d'un rideau de douche (**B**lanc ou **T**ransparent)

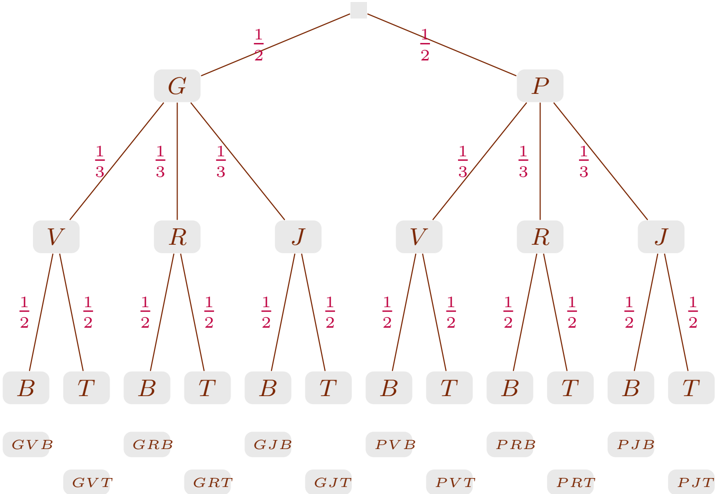
est proposé.

Chaque client prend exactement un gant de toilette, une serviette de bain puis un rideau de douche.

1. Dessinez un arbre rendant compte de cette situation.
2. Inquiet de manquer l'offre promotionnelle, un client prend au hasard un gant de toilette, une serviette de bain puis un rideau de douche. Quelle est la probabilité que ce client prenne une grande serviette (**G**), un gant rouge (**R**) et un rideau blanc (**B**) ?
3. On note A l'événement : « le client prend un gant de toilette jaune ». Énumérer les issues qui réalisent A. En déduire la probabilité de A.
4. Calculer la probabilité qu'un client prenne un gant de toilette **V**ert ou **R**ouge.
5. On note B l'événement « le client prend un rideau de douche blanc ». Énumérer les issues qui réalisent B. En déduire la probabilité de B.
6. Déterminer la probabilité que le client prenne une petite serviette et un rideau de douche blanc.
7. Décrire l'événement $A \cup B$ par une phrase puis calculer la probabilité de $A \cup B$.

Correction de l'exercice 17

1.



2. Le choix du client correspond au chemin (G, R, B). D'après le principe multiplicatif la probabilité de ce chemin est :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G, R, B) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

3. $A = \{(G, J, B), (G, J, T), (P, J, B), (P, J, T)\}$.
   Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(G, J, B) + \mathbb{P}(G, J, T), +\mathbb{P}(P, J, B) + \mathbb{P}(P, J, T) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

4. Notons C l'événement le client prend un gant de toilette vert ou rouge. $\overline{C} = \{(G, J, B), (G, J, T), (P, J, B), (P, JT)\}$. Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{C}) &= 4 \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

   On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) \\ &= 1 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

5. $B = \{(G, V, B), (G, R, B), (G, J, B), (P, V, B), (P, R, B), (P, J, B)\}$
   On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= 6 \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

6. Notons D l'événement « le client prend une petite serviette et un rideau de douche blanc ». Il y a 3 issues qui réalisent cet événement : $(P, V, B), (P, R, B), (P, J, B)$ donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D) &= 3 \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

7. $A \cup B$: « le client prend un gant de toilette jaune ou un rideau de bain blanc ».
   L'événement « le client prend un gant jaune et un gant blanc » est réalisé par (G, J, B) et (R, J, B) donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= 2 \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

   On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{4}{6} \end{aligned}$$

Exercice 18.

Un examen consiste à passer 3 épreuves indépendantes.

- Épreuve 1 : on a 80 % de chances de réussir.
- Épreuve 2 : on a 60 % de chances de réussir.
- Épreuve 3 : on a 25 % de chances de réussir.

On est reçu à l'examen si on réussi au moins deux épreuves sur trois.
Quelle est la probabilité de réussir l'examen ?

Exercice 19.

III Listes, permutations, combinaisons.

Rappelons que le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments qu'il contient.

1 Arrangements.

Définition 1

Soient :

. E un ensemble fini non vide,

. $p \in \mathbb{N}^*$.

Nous appellerons *p-arrangement de E* (ou arrangement de p éléments de E), tout p-uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemples.

1. Les 2-arrangements de $E = \{a, b, c\}$ sont (a, b), (b, a), (a, c) (c, a), (b, c) et (c, b).
2. Si le mot « math » est un 4-arrangement de lettres de l'alphabet, « mathématique » n'en n'est pas un car il ya répétition de lettres.

Proposition 2

Soient :

. $p \in \mathbb{N}^*$,

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. E un ensemble de cardinal n.

Le nombre de p-arrangements de E est

$$A_n^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) & \text{si } 0 < p < n \\ 1 & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

Démonstration

1. Si $p > n$ nous ne pourrons trouver p éléments distincts dans E.
2. Si $0 < p < n$ il s'agit d'interpréter la situation comme un tirage sans remise de p boules dans une urne en contenant n.

3. Si $p = 0$ c'est une convention.

■

Remarques.

1. Autrement dit si $p \in [\![0, n]\!]$,

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exemples.

1. Le nombre de 2-arrangements de $E = \{a, b, c\}$ est $A_3^2 = 3 \times (3 - 2 + 1) = 6$.
2. $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$.

2 Permutations.

Définition 2

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. E un ensemble de cardinal n.

Nous appellerons permutation de E tout n-arrangement d'éléments de E.

Exemples.

1. L'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ est $\mathfrak{S}_n$.
2. En français les permutations des lettres d'un mot sont appelés ses anagrammes.
3. Une permutation est une bijection de E sur E.
4. Il y a $n!$ permutations sur E de cardinal n.

3 Combinaisons.

Définition 3

Nous appellerons combinaisons de p éléments de E (ou p-combinaison) toute partie de E de cardinal p.

Remarques.

1. Nous retrouvons l'idée des chemins comptant le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli peu importe dans quel ordre. Si E est l'ensemble des niveaux de l'arbre (donc au nombre de n), peu importe à quels niveaux il y a eu succès ce qui importe c'est le nombre (p) de succès.

Proposition 3

Le nombre de p-combinaisons de E se note $\binom{n}{p}$ et est appelé coefficient binomial p parmi n.
Si $p > n$ alors

$$\binom{n}{p} = 0.$$

Si $0 \leqslant p \leqslant n$ alors

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Démonstration

Si $p > n$ il n'existe pas d $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$.

■

Exemples.

1. En particulier on retiendra $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

Proposition 4

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $p \in [\![0, n]\!]$.

(i) $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

(ii) $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

4 Formule du binôme de Newton.

Proposition 5

Pour tous nombres complexes a et b et pour tout entier naturel n non nul

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration

Une démonstration par récurrence un peu difficile du fait du changement d'indice dans des sommes discrètes.

■

5 Exercices.

Exercice 20.

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \binom{n}{n-1} = n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = (n+1)n!$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n}$.

Exercice 21.

Une urne contient quatre boules blanches et trois boules noires On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles ne comportant que des boules blanches ?
3. Combien y a-t-il de tirages unicolores ?
4. Combien y a-t-il de tirages comportant une boule blanche et deux boules noires ?

Exercice 22.

On choisit au hasard simultanément quatre cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles comportant le roi de cœur ?
3. Combien y a-t-il de tirages comportant quatre cœurs ?
4. Combien y a-t-il de tirages ne comportant aucun as ?

Exercice 23.

Le code d'une carte de crédit est formé de quatre chiffres distincts.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes ne comportant que des chiffres pairs ?
3. Combien y a-t-il de codes commençant par le chiffre 2 ?

Exercice 24.

Un numéro de téléphone est constitué de 10 chiffres dont le premier est 0 et les neuf autres quelconques.

1. Combien y a-t-il de numéros possibles ?
2. Combien y a-t-il de numéros possibles commençant par 06 ?
3. Calculez le nombre de numéros contenant
   (a) les dix chiffres,
   (b) exactement 3 fois le chiffre 6.

Exercice 25.

Un code est formé d'une lettre suivi de trois chiffres.

1. Combien y a-t-il de chiffres possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes commençant par la lettre A ?
3. Combien y a-t-il de codes commençant par A et contenant les chiffres 1, 2 et 3 ?

Exercice 26.

Un fleuriste dispose de 5 roses, trois tulipes, deux tournesols et quatre feuillages décoratifs pour composer un bouquet.

1. Combien de bouquets constitués de trois fleurs et d'un feuillage peut-il composer ?
2. Il décide de mettre une fleur de chaque espèce avec un feuillage pour constituer son bouquet. Quel est le nombre de bouquets possibles ?

Exercice 27.

Lors d'une course hippique on peut parier sur les cinq premiers chevaux à l'arrivée. On parle alors de quinté. 15 chevaux, numérotés de 1 à 15, sont au départ.
Combien y a-t-il de quintés différents :

1. en tenant compte de l'ordre ?
2. sans tenir compte de l'ordre ?

Exercice 28.

Une urne contient 100 jetons numérotés de 1 à 100. On tire simultanément deux jetons de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possible ?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux numéros pairs ?
3. Parmi les événements suivants, quel est le plus probable ?
   (a) A : « la somme des numéros est paire »,
   (b) B : « la somme des numéros est impaire ».

Exercice 29.

Combien peut-on former de mots de 5 lettres

1. comportant des lettres différentes ?
2. commençant par une voyelle et finissant par une consonne ?
3. contenant exactement une voyelle ?

Exercice 30.

Démontrez que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

Correction de l'exercice 30

On fait la somme des parties de E avec 0 éléments, puis 1 élément, puis 2, ..., jusqu'à n éléments. Ou on applique la formule du binôme de Newton.

Exercice 31.

Démontrez $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

Exercice 32.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \mapsto (1+x)^n$.

1. Calculez f' à partir de l'expression factorisée de f puis à partir de son expression développée.
2. Démontrez
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}.$$

Exercice 33.

Soit n un entier naturel.
Une urne contient n boules rouges et n boules vertes. On tire les boules de l'urne les unes après les autres jusqu'à ce que l'urne soit vide, en notant au fur et à mesure la couleur de la boule tirée : R pour rouge et V pour verte.

1. (a) Faire le lien entre le résultat obtenu et l'ensemble $E = \{R, V\}$.

   (b) Montrez que le nombre de ces $2n$-uplets est $\binom{2n}{n}$.

2. Considérons un jeu. On gagne 1 € à chaque tirage d'une boule de couleur différente de la boule précédemment tirée ; sinon on ne gagne rien. La partie est finie lorsque l'urne est vide.

   (a) Calculez la probabilité de gagner exactement 1 € lors d'une partie.

   (b) Calculer la probabilité de gagner 2 € lors d'une partie.

   (c) Soit k un entier naturel tel que $2 \leqslant k \leqslant 2n$.
   Calculez, en fonction de n, la probabilité de gagner au k-ième tirage.
   Cette probabilité dépend-elle du rang k ?

Exercice 34.

1. Un sac contient contient 5 boules indiscernables sur lesquelles sont écrites les lettre A, B, C, D et E.

   On tire une boule au hasard, on note la lettre, et on remet la boule dans l'urne. On répète trois fois cette action. On obtient ainsi un mot de trois lettres.

   À l'aides des coefficients binomiaux écrivez :

   (a) le nombre de mots que l'on peut obtenir ayant trois lettres différentes, sans tenir compte de l'ordre ;

   (b) le nombre de mots que l'on peut obtenir ayant deux lettres différentes et une lettre commune ;

   (c) le nombre de mots que l'on peut obtenir ayant trois lettres différentes.

2. Dans une combinaison avec combinaison de k objets pris parmi n objets distincts, un même objet peut être sélectionné plusieurs fois. On veut montrer que ce nombre de combinaison est égale à $\binom{n+k-1}{k}$.
   On symbolise les k objets par une ligne de O. Un répartition avec n objets distincts consiste alors à mettre des barres de séparation ente les objets. Le nombre de O entre deux barres signifie le nombre de fois qu'un même objet a été sélectionné.
   Par exemple avec $k = 8$ et $n = 5$:

$$OOO||OO|OO|O$$

$$O|OOO|O|OO|O$$

$$OO|O|OOO||OO$$

   Deux barres côte à côte signifie qu'il y a zéro objets d'un certain type.

   (a) Dans chacun des trois exemples ci-dessus, quel est le nombre total de symboles (barres et O) utilisés et quel est le nombre de barres ?

   Quelle conjecture peut-on donc faire sur le nombre de combinaisons avec répétitions de huit objets parmi cinq ?

   (b) On admet que le problème se ramène donc au choix de $n-1$ objets parmi $n+k-1$.
   Justifiez l'égalité $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$.

3. Quatre amies se rendent dans un salon de thé où huit thés différents sont proposés. Combien de plateaux de quatre tasses de thés, différentes ou non, pourra leur amener le serveur ?

Exercice 35. - Formule de Leibniz
La fonction dérivée d'une fonction f est notée f'. La dérivée de la fonction dérivée, notée f'' ou $f^{(2)}$, est appelée la *dérivée seconde* ou *dérivée d'ordre 2*.
Nous définirons plus généralement le *fonction dérivée d'ordre n* (n entier naturel) d'une fonction la fonction obtenue en dérivant n fois la fonction f et nous la noterons $f^{(n)}$.

Soient u et v des fonctions indéfiniment dérivables.
Déterminez la dérivée d'ordre n de la fonction produit uv.

Exercice 36.
Montrez :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall r \in [\![1, n]\!],\ \binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}.$$

Correction de l'exercice 36
Par récurrence sur n.

Exercice 37.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{k}\right)$.

1. Que valent $P_n(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-n)$?
2. Démontrez que pour tout réel non nul x, on a
$$P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1).$$
3. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, écrire $P_n(p)$ comme coefficient du binôme.

Exercice 38.
Soit $(p, q) \in]0, 1[^2$ tel que $p + q = 1$.
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \prod_{k=0}^{n} \exp\left(\binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right)$.

1. Déterminez $\ln(A_n)$.
2. Déduisez-en A_n pour $n \in \mathbb{N}$.

IV Épreuve et schéma de Bernoulli.

Quelle est l'expérience aléatoire la plus simple ? Le pile-ou-face. Comment, à partir de cette expérience construire d'autres expériences ? En lançant plusieurs fois la pièce.

L'objectif de cette leçon est d'être capable d'identifier une telle situation.

1 Épreuve de Bernoulli.

On appelle *épreuve de Bernoulli* toute expérience aléatoire dont l'univers a un cardinal de deux. Autrement dit l'univers ne comporte que deux issues. Traditionnellement l'une des deux issues est appelée *succès* et l'autre *échec*. La probabilité, habituellement notée p, du succès, est appelée *le paramètre* de l'épreuve de Bernoulli.

Ainsi lancer une pièce est une épreuve de Bernoulli puisqu'elle n'a que deux issues : pile et face. On notera indifféremment l'une succès et l'autre échec.

2 Schéma de Bernoulli.

Un *schéma de Bernoulli* est une expérience aléatoire formée de la répétition n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) d'une même épreuve de Bernoulli, les épreuves étant indépendantes. En notant p la probabilité du succès dans l'une des épreuve, on dit que le schéma de Bernoulli est de *paramètres* n et p.

Par exemple : lancer deux fois d'affilée une même pièce de monnaie parfaitement équilibrée est un schéma de Bernoulli de $n = 2$ et $p = \frac{1}{2}$.

L'univers pour un schéma de Bernoulli est le produit cartésien $\Omega = \{P, F\}^n$ qui contient 2^n issues.

3 Exercices.

Exercice 39.

Dites si les expériences aléatoires suivantes sont des épreuves de Bernoulli.

1. Un stock contient 1 % de pièces défectueuses. On y prélève une pièce et on regarde sil elle présente un défaut.
2. Selon l'INSEE, 45 % des familles françaises ont un seul enfant, 38 % en ont deux et 17 % en ont trois ou plus. On intérroge au hasard un élève et on lui demande le nombre d'enfants dans sa famille.

Correction de l'exercice 39

1. • Épreuve : prélever une pièce.
   • Succès S :« la pièce est défectueuse ».
   • Probabilité du succès : $p = \frac{1}{100} = 0,01$.

   Il s'agit bien d'une épreuve de Bernoulli.
2. • Épreuve : interroger une personne au hasard.
   • Il y a plus de deux issues et donc pas de succès.

   Il ne s'agit pas d'une épreuve de Bernoulli.

Exercice 40.

Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, dites si elle constitue un schéma de Bernoulli. Si oui donnez n et p.

1. Dans un stock de 20 vis, dont 3 sont trop longues, on prélève successivement 15 vis, au hasard et sans remise. Pour chacune on regarde si elle est trop longue ou non.
2. On considère une suite de 50 lettres choisies de façon aléatoire. Pour chacune d'entre elles, on regarde si elle est une voyelle ou non.

Correction de l'exercice 40

1. Il ne s'agit pas d'un schéma de Bernoulli car le tirage étant sans remise les différents tirages ne sont pas indépendants les uns des autres.
2. Démontrons qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli.

   * Épreuve de Bernoulli
     — Épreuve : choisir une lettre au hasard.
     — Succès : « La lettre est une voyelle. »
     — $p = \frac{6}{26}$.
   * Schéma de Bernoulli.
     Le choix de la lettre étant répété $n = 50$ fois à l'identique et de façon indépendante nous pouvons affirmer que
     $\boxed{\text{ces choix constituent un schéma de Bernoulli de paramètres } n = 50 \text{ et } p = \frac{6}{26}.}$

Exercice 41.

Une chaîne de magasins de bricolage commercialise des ponceuses « elliptiques ». Statistiquement 8 % des ponceuses du stock sont défectueuses.
On prélève au hasard 25 ponceuses elliptiques dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
Démontrez que cette situation est un schéma de Bernoulli dont vous préciserez les paramètres.

Correction de l'exercice 41

Démontrons qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli.

* Épreuve de Bernoulli
  — Épreuve : prélever une ponceuse.
  — Succès : « La ponceuse est défectueuse. »
  — $p = \frac{8}{100}$.
* Schéma de Bernoulli.
  Le choix de la ponceuse étant répété $n = 25$ fois à l'identique et de façon indépendante nous pouvons affirmer que

ces choix constituent un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 50$ et $p = \frac{6}{26}$.

V Loi binomiale.

1 Loi de Bernoulli.

Les résultats obtenus sont les lettres S (succès) et E (échec) ce qui n'est pas le plus pratique pour modéliser mathématiquement. C'est pourquoi nous allons associer une variable aléatoire aux épreuves de Bernoulli.

Définition 4

Nous dirons qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une *loi de Bernoulli de paramètre p*, si X compte le nombre de succès lors d'une épreuve de Bernoulli de paramètres p.

Remarques.

1. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p nous avons donc :

x	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	$1 - p$	p

2 Moments d'une loi de Bernoulli.

Proposition 6

Soient :

. $p \in [0; 1]$,

. X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.

(i) $\mathbb{E}(X) = p$.

(ii) $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$.

(iii) $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.

Démonstration

(i) Si $n \in \mathbb{N}^*$ désigne le nombre de valeurs prisent par la variable aléatoire :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)x_i$$

Donc ici :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{P}(X = x_1)x_1 + \mathbb{P}(X = x_2)x_2 \\ &= (1-p) \times 0 + p \times 1 \\ &= p\end{aligned}$$

(ii) Cette démonstration n'utilise pas la définition de la variance vue en première mais une caractérisation.
Puisque

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]$$

regardons la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$.

y_i	p^2	$(1-p)^2$
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$1-p$	p

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= (1-p) \times p^2 + p \times (1-p)^2 \\ &= p^2 - p^3 + p - 2p^2 + p^3 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1-p)\end{aligned}$$

(iii) Trivial.

■

3 Variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Définition 5

Nous dirons qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une *loi binomiale de paramètres n et p*, et nous noterons $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, si X compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

Remarques.

1. Par définition $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ (en utilisant d'autres notations : $X \in \{0; 1; \dots; n\}$).
2. En particulier si X suit une loi binomiale de paramètre $p \in [0; 1]$ alors $X \hookrightarrow \mathbb{B}(1, p)$.

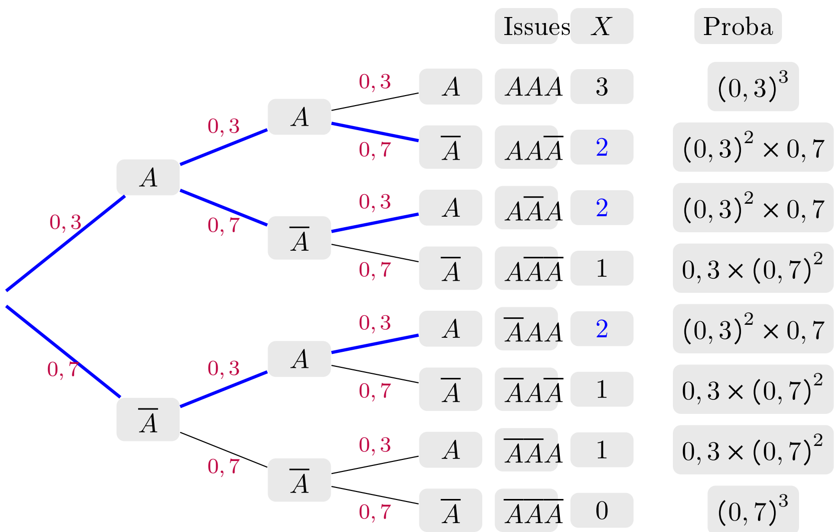
Exemples.

1. L'exemple typique est celui de la variable aléatoire X qui compte le nombre de piles obtenus lors de la répétition de plusieurs piles ou face. Ainsi si on lance 10 fois la pièce et que celle-ci est parfaitement équilibrée alors $X \hookrightarrow \mathbb{B}\left(10; \frac{1}{2}\right)$.

4 Calcul de probabilité pour une loi binomiale.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,3$.

La situation peut donc être représentée par l'arbre



Nous souhaitons calculer la probabilité d'obtenir 2 succès. Autrement dit nous cherchons $P(X = 2)$.

- La probabilité d'un chemin comportant 2 succès est $0,3 \times 0,3 \times 0,7 = 0,3^2 \times 0,7$
- Il y a $\binom{3}{2} = 3$ chemins sur l'arbre comportant (exactement) 2 succès.

Nous en déduisons $P(X = 2) = 3 \times 0,3^2 \times 0,7 = 0,189$.

Proposition 7

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $k \in [\![0, n]\!]$,

. $p \in [0; 1]$,

. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

5 Calcul de probabilité ou de fonction de répartition avec la calculatrice.

Supposons par exemple que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(12; 0, 2)$.

Pour calculer $P(X = 3)$ on peut utiliser la fonction $binomFdp(n, p, k)$. Autrement dit :
$\boxed{\text{2nde}}$, $\boxed{\text{var}}$ (distrib), onglet (DISTRIB), choix $A : binomFdp$.

Pour calculer $P(X \leq 3)$ on peut utiliser la fonction $binomFRp(n, p, k)$. Autrement dit :
$\boxed{\text{2nde}}$, $\boxed{\text{var}}$ (distrib), onglet (DISTRIB), choix $B : binomFRp$.

6 Moments d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Proposition 8

Soit $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

(i) $\mathbb{E}(Y) = np$.

(ii) $\mathbb{V}(Y) = np(1 - p)$.

(iii) $\sigma(Y) = \sqrt{np(1 - p)}$.

Démonstration

La démonstration repose sur des propriétés de l'espérance et de la variance que nous n'avons pas étudiées que nous admettrons.

(i) Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1, p)$. Puisque $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, $Y = X + X + \cdots + X$. Ainsi

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X + X + ... + X)$$

Donc, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X) + \cdots + \mathbb{E}(X)\\ &= n\mathbb{E}(X)\\ &= np\end{aligned}$$

(ii)

■

7 Exercices.

Exercice 42.

Une entreprise fabrique des assiettes. On sait que 6 % des assiettes produites présentent un défaut. On choisit une assiette au hasard. Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'assiette ne présente pas de défaut et 0 sinon.

1. Quelle loi suit X ?
2. Donnez le paramètre de cette loi.
3. Calculez $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X)$.

Correction de l'exercice 42

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1; 0,94)$.
2. $p = 0,94$.
3. $\mathbb{E}(X) = p = 0,94$, $\mathbb{V}(X) = p(1-p) = 0,94 \times 0,06 = 0,024$, $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} \approx 0,1549$.

Exercice 43.

Dans un stock de ballons de foot contenant 70 % de ballons bicolores, on prélève 12 ballons au hasard, successivement et avec remise.
X donne le nombre de ballons bicolores obtenus.
Justifiez que X suit une loi binomiale.

Correction de l'exercice 43

Démontrons que X suit une loi binomiale.

* Épreuve de Bernoulli
  — Épreuve : prélever un ballon
  — Succès : « Le ballon est bicolore. »

— $p = \frac{70}{100}$.

* Schéma de Bernoulli.

  Le choix du ballon étant répété $n = 12$ fois à l'identique et de façon indépendante (avec remise) nous pouvons affirmer qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli.

* Variable aléatoire.

  La variable aléatoire X compte le nombre de ballons bicolores obtenus donc le nombre de succès de notre schéma de Bernoulli.

* Conclusion.

  X suit la loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = \frac{70}{100}$

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(12; \frac{70}{100}\right)$$

Exercice 44.

Dites si la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Si oui précisez-en les paramètres.

1. Dans un supermarché, 20 % des clients du samedi ont un caddie inférieur à 100 €.

   On choisit au hasard 15 clients un samedi. X donne le nombre de clients dont le caddie est inférieur à 100 €.

2. On lance cinq fois de suite une pièce bien équilibrée. X donne le rang du 1$^{\text{er}}$ pile obtenu (X prend la valeur 6 si on a pas obtenu de pile sur les 5 lancers).

Correction de l'exercice 44

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(15; 0,2)$.
2. Pas binomiale.

Exercice 45.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,1$.
Donnez une valeur approchée de $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X = 3)$ et $\mathbb{P}(X = 4)$.

Exercice 46.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{3}{4}$.

1. Donnez une valeur approchée de $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = 2)$.
2. Déduisez-en $\mathbb{P}(X \geqslant 3)$.

Correction de l'exercice 46

1. $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4096}$, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{9}{2048}$ $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{135}{4096}$.
2. $\frac{1971}{2048} \approx 0,9624$

Exercice 47.

D'après l'INSEE, la proportion de Français de moins de 20 ans est restée stable à $24,6$ % entre 2012 et 2014. On suppose que cette proportion se maintient pendant quelques années.
On interroge au hasard 12 Français et on note X la variable aléatoire donnant le nombre d'entre eux qui sont âgés de moins de 20 ans.

1. Justifiez que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculez les probabilités des événements suivants.
   (a) 10 personnes interrogées ont moins de 20 ans.
   (b) Au plus 8 personnes interrogées ont moins de 20 ans.
   (c) Au moins 4 personnes interrogées ont moins de 20 ans.
3. Quel est le nombre le plus probable de personnes ayant moins de 20 ans ?

Exercice 48.

18 % des Français âgés de plus de 15 ans ont fréquentés au moins une fois une bibliothèque en 2008.
On suppose que cette proportion se maintient pendant les années qui suivent et on interroge au hasard 30 Français âgés de plus de 15 ans. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'entre eux qui ont fréquenté une bibliothèque dans l'année.

1. Justifiez que X suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.
2. Calculez la probabilité des événements suivants :
   a) $\mathbb{P}(X = 10)$, b) $\mathbb{P}(X \leqslant 5)$, c) $\mathbb{P}(X > 8)$.
   Traduisez chaque résultat par une phrase dans le contexte de l'exercice.
3. Quel est le nombre le plus probable de personnes ayant fréquenté une bibliothèque dans l'année ?

Correction de l'exercice 48

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(30; 0,18)$.
2. (a) $P(X = 10) \approx 0,0203$. La probabilité que 10 personnes parmi les 30 interrogées aient fréquenté une bibliothèque dans l'année est de $0,0203$.

(b) $P(X \leq 5) \approx 0,5395$. La probabilité qu'au plus 5 personnes parmi les 30 interrogées aient fréquenté une bibliothèque dans l'année est de $0,5395$.

(c) $P(X > 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 0,1582$. La probabilité qu'au moins 7 personnes parmi les 30 interrogées aient fréquenté une bibliothèque dans l'année est de $0,1582$.

3. Le résultat s'obtient avec le tableau de valeur de la calculatrice. Le nombre le plus probable est de 5 personnes parmi les 30.

Exercice 49.

Un fumeur est dit « fumeur régulier » s'il fume au moins une cigarette par jour.
En 2010, en France, la proportion de fumeurs réguliers âgés de 15 à 19 ans, était de $23,6$ %.
On choisit au hasard, et de manière indépendante, quinze jeunes âgés de 15 à 19 ans.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de fumeurs réguliers parmi ces quinze jeunes.

1. Précisez la loi de probabilité de X.
2. Déterminez les probabilités des événements suivants, en arrondissant à $0,001$ près.

   (a) Deux des jeunes interrogés sont des fumeurs réguliers.

   (b) Aucun des jeunes interrogés n'est un fumeur régulier.

   (c) Moins de cinq jeunes interrogés sont des fumeurs réguliers.

   (d) Plus d'un jeune interrogé est un fumeur régulier.

Exercice 50.

Un fabricant vend des stylos par lot de 10. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de stylos défectueux dans un lot. On admet que X suit une loi binomiale de paramètres 10 et $0,034$.
On donnera les résultats à 10^{-3} près.

1. Quelle est la probabilité que le lot contienne au moins un stylo défectueux ?
2. Quelle est la probabilité que le lot contienne au moins deux stylos défectueux ?

Exercice 51.

On lance simultanément deux dés à six faces parfaitement équilibrés.

1. Quelle est la probabilité de faire un double 6 ?
2. On lance 10 fois de suite cette paire de dés.
   Quelle est la probabilité de faire au moins trois double 6 lors de ces 10 parties ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

Exercice 52.

Une association organise une tombola et vend un très grand nombre de tickets à gratter ? On suppose que deux tickets sur dix sont gagnants.
Une personne achète au hasard vingt tickets.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tickets gagnants.

1. Donnez la loi de probabilité de X.
2. Sans justification donnez la valeur de k telle que $\mathbb{P}(X = k)$ soit maximale. Interprétez ce résultat.
3. Calculez l'espérance de X. Interprétez.

Exercice 53.

Un basketteur s'entraîne à tirer des lancers francs. On suppose que, quel que soit le résultat des tirs précédents, la probabilité qu'il réussisse est égale à $0,8$. Il effectue une série de 30 tirs. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où il réussit son tir.

1. Déterminez la loi de probabilité de X.
2. Calculez la probabilité que le basketteur
   (a) réussisse 18 tir exactement,
   (b) réussisse moins de 15 tirs,
   (c) réussisse au moins 20 tirs.
3. Déterminez le nombre moyen de tirs réussis.

Exercice 54.

On joue à pile ou face cinq fois de suite. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de fois où on a obtenu face.

1. Quelle loi suit X ? Donnez ses paramètres.

Pour jouer à ce jeu, il faut payer 3 €. On gagne 1 € à chaque fois qu'on obtient face lors d'un des cinq lancers.
On note Y la variable aléatoire représentant le gain (ou la perte) totale lors de ce jeu.

2. Exprimez Y en fonction de X.
3. Déduisez-en $\mathbb{E}(Y)$.
4. Ce jeu est-il financièrement intéressant ?
5. Quelle somme aurait-il fallu payer au départ pour que le jeu soit équitable ?

Correction de l'exercice 54

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(5, 0, 5)$.
2. $Y = -3 + X$.
3. $\mathbb{E}(Y) = -3 + \mathbb{E}(X) = -3 + np = -3 + 5 \times 0,5 = -0,5$.
4. $\mathbb{E}(Y) < 0$ donc ce jeu est défavorable au joueur.
5. $2,5$.

Exercice 55.

Un tireur à l'arc atteint sa cible neuf fois sur dix. Ce tireur participe à un concours primé.
Il tire 5 flèches sur la cible. Pour chaque flèche, s'il atteint la cible, il gagne 10 € , sinon il perd 20 €. On suppose que les tirs sont indépendants.

1. On appelle X le nombre de flèches ayant atteint la cible à l'issue des cinq tirs.
   (a) Montrer que X suit une loi binomiale dont précisera les paramètres.
   (b) Déterminez la probabilité d'atteindre au moins 2 fois la cible.
2. On appelle Y la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue des cinq tirs.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
   (b) Déterminez la loi de Y.
   (c) Quel est le gain moyen (positif ou négatif) du tireur s'il participe un grand nombre de fois à ce concours ? Est-ce intéressant pour lui ?

Correction de l'exercice 55

1. (a) $X \hookrightarrow \mathscr{B}(5; 0,9)$.
   (b) $\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 1) = 0,99954$
2. (a) $Y \in \{-100; -70; -40; -10; 20; 50\}$.
   (b)

y	-100	-70	-40	-10	20	50
$\mathbb{P}(Y = y)$	10^{-5}	$4,5 \times 10^{-4}$	$0,0081$	$0,0729$	$0,032805$	$0,059049$

   (c) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(10X - 20(5 - X) = \mathbb{E}(30X - 100) = 30\mathbb{E}(X) - 100$.

Exercice 56. - BAC

— Centres étrangers groupe I sujet 1 13 mars 2023. Arbre, suite, binomiale.
— Polynésie sujet 2 14 mars 2023. Arbre, suite, binomiale.