02 Suites.

I Majorants et minorants.

1 Définitions

2 Exercices.

Exercice 1.

Déterminez si chacune des suites proposées est minorée, majorée ou bornée.

a) $u_n = \dfrac{n+3}{2n+1}$;

b) $u_n = \dfrac{n-1}{2n-3}$;

c) $u_n = \dfrac{n+1}{n}$;

d) $u_n = (-1)^n \times \dfrac{n^2}{n+1}$;

e) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$;

f) $u_n = \pi^n - 3^n$;

g) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - 2n$;

h) $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$;

i) $u_n = \sin\left(2^n \times \pi\right)$.

Exercice 2.

Démontrez que les suites suivantes sont bornées.

a) $u_n = 10 - 2\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$;

b) $u_n = \dfrac{n}{n+2}$;

c) $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 1$;

d) $u_n = 1 + \dfrac{2}{7} + \left(\dfrac{2}{7}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{2}{7}\right)^n$;

e) $u_n = 25 + 5 + 1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots + \dfrac{1}{5^n}$;

f) $u_n = 9 + 3 + 1 + \cdots + 3^{-n+2}$.

Exercice 3.

Déterminez si chacune des suites proposées est minorée, majorée ou bornée.

a) $u_n = \dfrac{n+3}{2n+1}$;

b) $u_n = \dfrac{n-1}{2n-3}$;

c) $u_n = \dfrac{n+1}{n}$;

d) $u_n = (-1)^n \times \dfrac{n^2}{n+1}$;

e) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$;

f) $u_n = \pi^n - 3^n$;

g) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - 2n$;

h) $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$;

i) $u_n = \sin\left(2^n \times \pi\right)$.

Exercice 4.

Démontrez que les suites suivantes sont bornées.

a) $u_n = 10 - 2\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$;

b) $u_n = \dfrac{n}{n+2}$;

c) $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 1$;

d) $u_n = 1 + \dfrac{2}{7} + \left(\dfrac{2}{7}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{2}{7}\right)^n$;

e) $u_n = 25+5+1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots+\dfrac{1}{5^n}$;

f) $u_n = 9+3+1+\cdots+3^{-n+2}$.

II Limites infinies.

1 Définition des limites infinies.

2 Une condition nécessaire.

3 Une condition suffisante.

4 Des suites de référence.

5 Exercices.

Exercice 5.

Déterminez ou conjecturez l'éventuelle limite infinie de (u_n) dans les cas suivants (vous pourrez utiliser votre calculatrice).

a) $u_n = \frac{1}{n} + \sqrt{n}$.

b) $u_n = n^4$.

c) $u_n = 4^n$.

d) $u_n = 0,25^n$.

e) $u_n = \left(-\frac{1}{10}\right)^n$.

f) $u_n = (-3)^n$.

g) $u_n = -5n^3 + 4n^2 + n - 4$.

h) $u_n = n^6 - 4n^5 - 1000$.

i) $u_n = -\sqrt{\frac{1}{n^2}}$.

j) $u_n = \dfrac{e^n}{n^3}$.

k) $u_n = \dfrac{4n^2 - 3n + 1}{-2n^2 + n - 5}$.

l) $u_n = \dfrac{7n^2 + n + 1}{5n^6 + n^3}$.

m) $u_n = e^{n^2}$.

n) $u_n = e^{-n^2}$.

o) $u_n = (-1)^n$.

p) $u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

q) $u_n = \sin(n\pi) + n^2$.

Exercice 6.

Déterminez ou conjecturez l'éventuelle limite infinie de (u_n) dans les cas suivants (vous pourrez utiliser votre calculatrice).

a) $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2$.

b) $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n$.

c) $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{5}{3}u_n$.

d) $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n$.

e) $u_0 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

f) $u_0 = -12$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

g) $u_0 = -3$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{7}{4}u_n - 1$.

h) $u_0 = 6$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{7}{4}u_n - 1$.

Exercice 7.

Démontrez à partir de la définition les limites suivantes.

a) $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

b) $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

III Limites finies.

1 Définition.

2 Suites de référence.

3 Exercices.

Exercice 8.

Déterminez la limite des suites suivantes.

a) $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) $\left(\frac{\sqrt{n}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) $\left(n^{12}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

d) $\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

e) $\left(3+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

f) $\left(\frac{1}{n^2}-4\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

g) $\left(\frac{1}{\pi^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

h) $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

i) $\left(\frac{n^4}{n^7}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

j) $\left(\frac{n^2\times n^{25}}{n^{-7}\times n^{26}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

k) $\left(\mathrm{e}^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

l) $\left(\mathrm{e}^{4n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

m) $\left(\frac{\mathrm{e}^{4n}\times\mathrm{e}^{-5n}}{\mathrm{e}^{-3n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

n) $\left(\frac{\mathrm{e}^{2n}}{\mathrm{e}^{4n}\times\mathrm{e}^{-2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

o) $\left(\frac{\mathrm{e}^{-2n}+\mathrm{e}^{-3n}}{\mathrm{e}^{-2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

p) $\left(\frac{2^n}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

q) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

r) $\left(\frac{\mathrm{e}^n}{\pi^n}+2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

s) $\left(\frac{5^n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 9.

Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \frac{2}{7}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}$.

1. On considère le programme suivant où M est un nombre dans $\left]0; \frac{3}{4}\right[$.

```
def programme(M):
n=0
u=2/7
while u<M:
n=n+1
u=1/3*u+1/2
return(n)
```

   Quel est l'intérêt de cet algorithme ?
2. Testez ce programme avec différentes valeurs de M, de plus en plus proche de $\frac{3}{4}$. Que remarquez-vous ?
3. Complétez la conjecture suivante : « $\frac{3}{4}$ semble le plus ... des majorants de la suite (u_n) ».
4. Montrez que, pour tout entier naturel n :
$$\frac{3}{4} - u_n = \frac{13}{28 \times 3^n}.$$
5. Pourquoi la conjecture précédente est-elle vraie ?

IV Suites, limites et comparaisons.

1 Limites finies.

2 Limites infinies.

3 Exercices.

Exercice 10.

Déterminez la limite de la suite (u_n) sachant que pour tout entier naturel n $4 - 0,9^n \leqslant u_n \leqslant 4 + 0,1^n$.

Exercice 11.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

1. Montrez que pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 2^n$.
2. Déduisez-en la limite de (u_n).

Exercice 12.

Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

b) $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2}$;

c) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$;

d) $u_n = \dfrac{1}{n} + 3^n$;

e) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^3}$;

f) $u_n = \dfrac{1}{6^n}$.

g) $u_n = 0,5^n + \sqrt{n}$.

h) $u_n = -n^3 - 2n^2$.

i) $u_n = n^2 + 4n + 1$.

j) $u_n = 1 + \left(\dfrac{1}{6}\right)^n + n^3$.

k) $u_n = n + (-1)^n + 1$;

l) $u_n = n^2 - \sin(n) + 1$;

m) $u_n = \sin\left(\sqrt{\cos\left(n^2 - n^n\right)}\right) - n - 1$.

n) $u_n = n! + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

o) $u_n = n! + \sqrt{n}$.

p) $u_n = \left(\dfrac{99}{100}\right)^n \sin(n)$.

q) $u_n = n^2 + 2n + (-1)^n n$.

r) $u_n = 5 - \dfrac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$.

Exercice 13.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$:

$$u_n = 1 + \frac{1}{n + (-1)^n}.$$

1. Montrez que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$ on a :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

2. Déterminez les limites des suites de termes généraux :

$$\frac{1}{n+1} \text{ et } \frac{1}{n-1}.$$

3. Concluez quant à la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 14.

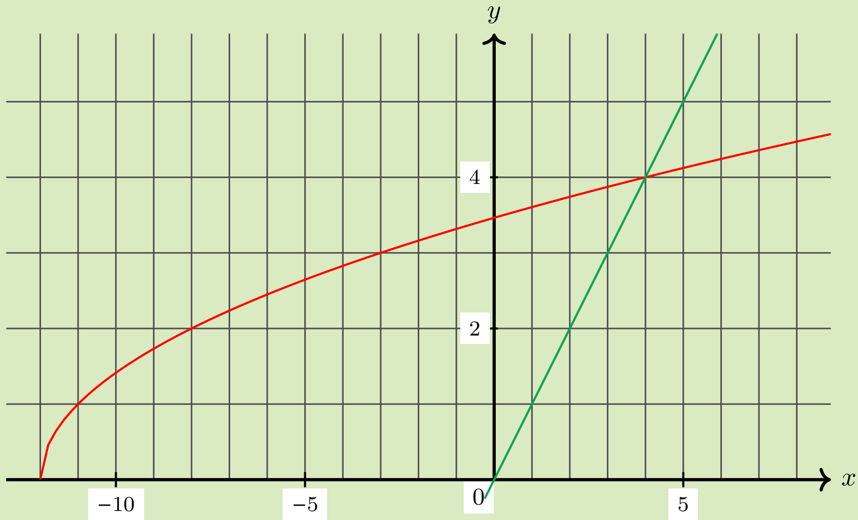
Démontrez que si $q \in]-1;1[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Exercice 15.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}.$$

1. Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$.
2. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-12; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x + 12}$.



Construisez les premiers de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et conjecturez son comportement.

3. (a) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - 4 \leqslant \frac{1}{4}(u_n - 4).$$

   (b) Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - 4 \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}.$$

4. Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on précisera.

Exercice 16.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Écrivez un algorithme permettant de calculer les termes $u_0, \ldots, u_n$, où n est un entier saisi à la demande.
2. Programmez le précédent algorithme, exécutez-le puis donnez les termes u_1 à u_{10}.
3. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. (a) Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
   (b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Conjecturez une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n nombre entier naturel, puis démontrez la propriété ainsi conjecturée.

V Suites, opérations sur les limites.

1 Devinez.

2 Somme.

3 Produit.

4 Inverse.

5 Quotient.

6 Lever l'indétermination.

7 Exercices.

Exercice 17. B

Déterminez les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n^2 + n + \dfrac{1}{n}$.

b) $u_n = \sqrt{n}\left(n^2 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

c) $u_n = \dfrac{4}{\sqrt{n} + n}$.

d) $u_n = n^3 + n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

e) $u_n = 5n^2 + 3n\sqrt{n}$.

f) $u_n = \sqrt{n}(2 - n - 2n^2)$.

g) $u_n = \dfrac{1}{n^2 + n - 1}$.

h) $u_n = n^2\left(\dfrac{2}{n+1} - 1\right)$.

i) $u_n = \dfrac{3}{n}\left(\dfrac{3}{n^3} - 5\right)$.

j) $u_n = \dfrac{3}{1 - 2n} - \dfrac{2}{1 - 3n}$.

k) $u_n = 2 - \dfrac{3}{6 + \sqrt{n}}$.

l) $u_n = 2 - n\sqrt{5n} + \dfrac{1}{n^2 + 1}$.

m) $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

n) $u_n = n(n-4)(1 - \sqrt{n})$.

o) $u_n = -\mathrm{e}^{1/n^2} n^4$.

p) $u_n = -\mathrm{e}^{1/n^2} n^{-4}$.

Exercice 18.

Identifier parmi les suites dont le terme général est donné ci-après, les situations conduisant à une forme indéterminée lors de l'étude de la convergence, sinon donnez la limite.

On peut schématiquement résumer les formes indéterminées par :

$$(+\infty)-(+\infty),\quad (-\infty)-(-\infty),\quad 0\times\infty,\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \frac{}{0^?}.$$

a) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2^n}$. b) n^2-6^n. c) $\sqrt{n^{-1}}+n!$.

d) $2^{-n}+\sqrt{n}$. e) $n^{12}+\dfrac{1}{n^{100}}$. f) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}+n!+1$.

g) $n^2 3^n$. h) $\dfrac{n^2}{n^{12}}$. i) $\dfrac{n!}{2^n}$.

j) $n^{-2}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$. k) $\dfrac{n^{-3}}{\sqrt{n}}$. l) $n^5 2^{-n}$.

m) $n^{-3}+0,5^n\sqrt{n}$. n) $\dfrac{1}{n^4}\times \mathrm{e}^n+4$. o) $\dfrac{\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}$.

Exercice 19.

Déterminez, si possible la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

a) n^7+12. b) 4^n-7. c) $n^3+\dfrac{0,1^n}{\sqrt{n}}$.

d) $\dfrac{1}{n}+4$. e) $n^{-4}+\sqrt{n}$. f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+2+\dfrac{1}{n^2}$.

g) $n!n^2+2-\dfrac{1}{n^2}$. h) $\dfrac{\sqrt{n}}{2+\mathrm{e}^{-n}}$. i) $\dfrac{n^4+1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-4}$.

j) $\dfrac{n\times 2^n}{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$. k) $n!-\left(2-n^2\right)$. l) $n^2\left(n^3+\dfrac{3}{\sqrt{n}}+1\right)$.

m) $2n^3+5n^2+n-12$. n) $-5n^3-2n^2-12n-3$. o) $4n^2-n+1$.

p) $\dfrac{n^3}{n^2}$. q) $n^2+3^n+4-\dfrac{1}{n}$.

Exercice 20.

Déterminez les limites en levant l'indétermination.

a) $u_n = n^3 - n + 5$.

b) $u_n = n^4 - n^2 + 1$.

c) $u_n = 3n\sqrt{n} - 2n^3$.

d) $u_n = \dfrac{n-3}{n+1}$.

e) $u_n = \dfrac{n^2 - \sqrt{n}}{n+3}$.

f) $u_n = \dfrac{n^2 - n + 4}{3n^2 - 2n + 5}$.

g) $u_n = \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3 + 8}$.

h) $u_n = n\sqrt{n^2 + 3} - n^2$.

i) $u_n = n^2 - 3n$.

j) $u_n = 4n^3 - 3n^2 + 2$.

k) $u_n = 3n^4 - 3n^3 - 2n + 1$.

l) $u_n = \dfrac{4n-1}{3n+1}$.

m) $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$.

n) $u_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + n + 1}$.

o) $u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$.

p) $u_n = \sqrt{5n+4} - \sqrt{5n+2}$.

q) $u_n = \sqrt{4n^2 + n + 3} - 2n$.

r) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2}}$.

s) $u_n = n - \dfrac{n^2}{n+1}$.

t) $u_n = \dfrac{n-3}{2n+1} - \dfrac{n+3}{3n-1}$.

u) $u_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2}{n+2}$.

v) $u_n = \dfrac{n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$.

w) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{n}$.

x) $u_n = \sqrt{n - \sqrt{n}} - \sqrt{n}$.

Exercice 21.

— Centres étrangers groupe 2 sujet 1 21 mars 2023. Arbre probabiliste, suites, limites.

— Baccalauréat S Métropole 23 juin 2009

Exercice 22. épisode 1.

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distincts, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à $0,84$;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à $0,76$.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

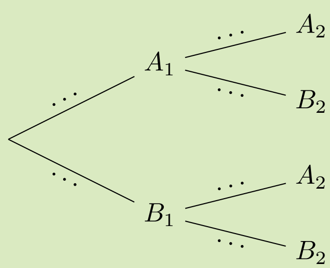
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

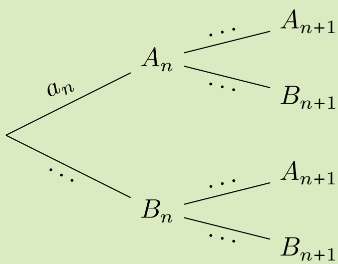
Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



Exercice 22. épisode 2.

2. (a) Calculer a_2.
   (b) Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.
3. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



   (b) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.
5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

VI Suites, limite monotone.

1 Limite finie.

2 Limite infinie.

3 Passer à la limite dans une égalité.

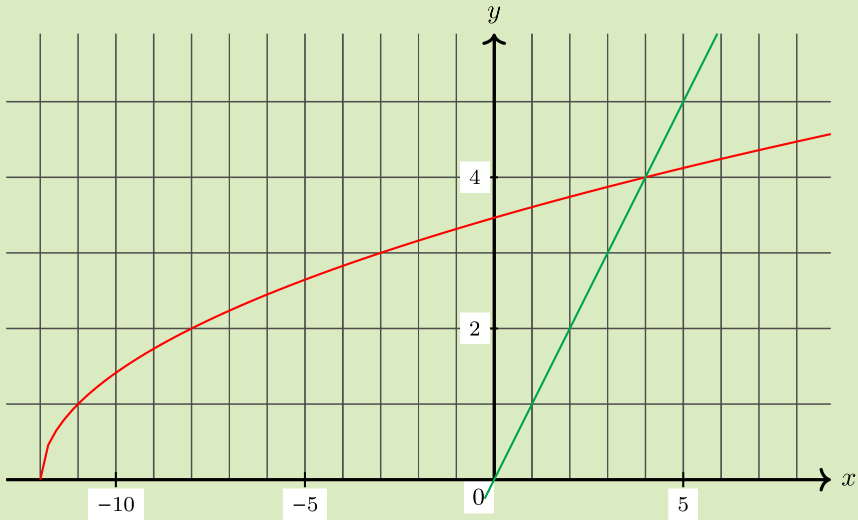
4 Exercices.

Exercice 23.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}.$$

1. Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$.
2. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-12;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+12}$.



Construisez les premiers de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et conjecturez son comportement.

3. (a) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - 4 \leqslant \frac{1}{4}(u_n - 4).$$

(b) Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - 4 \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}.$$

4. Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on précisera.

Exercice 24.

On considère la suite $u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

1. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 4.
3. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. En passant à la limite dans la formule de récurrence, démontrez que la limite ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être que 4.
5. Concluez.

Exercice 25. C

Posons $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

1. Montrez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que (u_n) est majorée par 3.
3. Déduisez-en que (u_n) converge et montrez que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Exercice 26.

Soit (u_n) a suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Prouvez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $u_{2^m+1} - u_{2^m} \geqslant \frac{1}{2}$.
3. Déduisez-en que (u_n) n'est pas majorée. Concluez.
4. Déterminez avec une machine un entier N tel que $u_N > 10$.

Exercice 27.

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2.$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1,4x - 0,05x^2.$$

   (a) Étudiez les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.

   (b) Représentez graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec le centimètre comme unité graphique, ainsi que les 10 premiers termes de la suite (v_n).

   (c) Conjecturez son comportement.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$2 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8.$$

3. Déduisez-en que la suite (u_n) admet une limite finie.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrez que

$$f(x) - 8 = -0,05(x-20)(x-8).$$

   (a) Pour tout entier naturel n :

$$8 - v_{n+1} \leqslant 0,9 \times (8 - v_n).$$

   (b) Déduisez-en que, pour tout entier naturel n :

$$8 - v_n \leqslant 6 \times 0,9^n.$$

   (c) Concluez.

Exercice 28.

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de $1,8$ mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de $30\,\%$ par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   (c) Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6-u_n$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,7$ dont on précisera le premier terme.
   (b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
   (c) Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à $5,5$ mg.
   Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

Exercice 29.

Un démographe étudie l'évolution de la population d'un pays.
Depuis 1969 (cette année-là, ce pays comptait 44 500 000 habitants), il constate qu'en moyenne la population a un taux de natalité de 35 pour mille et un taux de mortalité de 17 pour mille.
À ces variations, il faut ajouter 25 000 nouveaux arrivant dans ce pays et retirer 9 000 citoyens qui partent définitivement.
On note p_n la population de $1969 + n$, exprimée en milliers d'habitants.

1. Déterminez p_0.
2. Démontrez que pour tout entier naturel n :
$$p_{n+1} = 1,018p_n + 16.$$
3. Déterminez le réel ℓ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$u_n = p_n - l$$
soit géométrique.
4. Déduisez-en les expressions de u_n et p_n en fonction de n entier naturel.
5. Combien d'habitants peut-on prévoir en 2012 ?
6. Au bout de combien d'années la population va-t-elle tripler, par rapport à celle de 1969 ?

Exercice 30.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculez u_1, u_2 et u_3.
2. (a) Écrivez un algorithme qui, pour une valeur $M \in \mathbb{R}$ donnée, renvoie un entier n pour lequel $u_n > M$.

   (b) Programmez cet algorithme à l'aide d'une calculatrice, puis exécutez-le pour des valeurs de M telles que 101, 100, 1 000.

   (c) Déduisez-en une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) à l'infini.
3. Démontrez que pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 4$ alors :

$$u_n \geqslant 0.$$

4. Démontrez que, pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 5$ alors :

$$u_n \geqslant n - 3.$$

5. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

Exercice 31. Partie A.

On définit :

. la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5};$$

. la suite (S_n) pour tout entier naturel n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. Montrez par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}.$$

   Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

2. (a) Déterminez le sens de variation de la suite (S_n).

   (b) Calculez (S_n) en fonction de n.

   (c) Déterminez la imite de la suite (S_n).

Exercice 31. Partie B.

Étant donnée une suite (x_n), de nombres réels définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) défine par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Indiquez pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse ; justifiez dans chaque cas.

Proposition 1 : « si la suite (x_n) est convergente alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (u_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

Exercice 32.

Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ T_{n+1} = 0,955 T_n + 0,9$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n \geqslant 20$.

   (b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0,045\,(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n).

   (c) Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = T_n - 20$.

   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$.

   (c) Calculer la limite de la suite (T_n).

   (d) Résoudre l'inéquation $T_n \leqslant 120$ d'inconnue n entier naturel.

3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.

   On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180° C et celle de l'air ambiant de 20° C.

   La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n). Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

   (a) Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.

   (b) On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temp(x) :
    T = 180
    n = 0
    while T > x :
        T=0.955*T+0.9
        n=n+1
    return n
```

   Donner le résultat obtenu en exécutant la commande temp(120).

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 33. épisode 1.

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à $0,84$;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à $0,76$.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

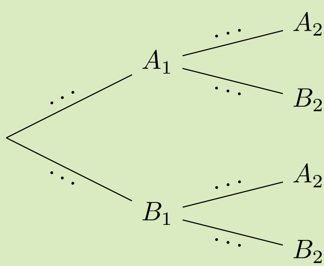
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

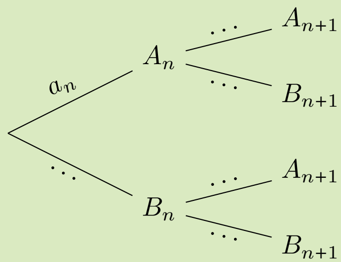
Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



Exercice 33. épisode 2.

2. (a) Calculer a_2.
   (b) Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.
3. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



   (b) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.
5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 34.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Prouvez que (u_n) est croissante et majorée puis concluez.
Pour établir la majoration on établira ; pour tout entier $k > 1$:

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Exercice 35.

Montrez que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ converge.

Exercice 36. Nombre d'Apéry

On pose pour tout entier supérieur ou égale à 1 :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}.$$

1. Justifiez que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrez à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

3. Qu'en conclure ?
4. Soit $\varepsilon > 0$.
   Écrivez un algorithme qui renvoie une valeur approchée à ε près de la limite de la suite (u_n).

Exercice 37.

— Baccalauréat S Liban 28 mai 2013. Exercice 4.
— Baccalauréat S Polynésie 7 juin 2013. Exercice 4.
— Baccalauréat S Asie 18 juin 2013 Exercice4.