02 Suites.

I Majorants et minorants.

1 Définitions

Définition 1

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle,

. M et m deux réels.

Nous dirons que

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée* par M si, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$;

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *minorée* par m si, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n$;

(iii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques.

1. Un majorant n'est pas un maximum. Pas plus qu'un minorant n'est un minimum.

   Cependant un maximum est un majorant et un minimum un minorant.
2. Ainsi une suite est bornée s'il est possible de trouver des nombres m et M tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.
3. Trouver un minorant et un majorant pour une suite c'est limiter les possibilités de valeurs des termes de la suite. Dans de nombreux cas il faut se contenter de cela.

Exemples.

1. Par une étude de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ on obtient aisément : $0 < \frac{1}{x} \leqslant 1$.

   Donc $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0, -1, $-234,5$ et majorée par 1, 3, $20\,000$. Donc elle est bornée.

   Remarquons également que cette suite a un maximum mais pas de minimum.
2. $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées puisque nous savons que les fonctions sinus et cosinus sont, par construction, bornées par -1 et 1.
3. La suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ est bornée : $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous pouvons le conjecturer d'après la calculatrice ou graphiquement.

2 Exercices.

Exercice 1.

Déterminez si chacune des suites proposées est minorée, majorée ou bornée.

a) $u_n = \dfrac{n+3}{2n+1}$;

b) $u_n = \dfrac{n-1}{2n-3}$;

c) $u_n = \dfrac{n+1}{n}$;

d) $u_n = (-1)^n \times \dfrac{n^2}{n+1}$;

e) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$;

f) $u_n = \pi^n - 3^n$;

g) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - 2n$;

h) $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$;

i) $u_n = \sin\left(2^n \times \pi\right)$.

Correction de l'exercice 1

Dans tous les cas il faut calculer les premiers termes pour émettre une conjecture.

Avec une formule explicite il est parfois possible de deviner l'allure de la courbe représentative sans faire d'étude approfondie.

a) Clairement minorée par 0. (u_n) décroissante et $u_0 = 3$ donc majorée par 3.

b)

* En utilisant la forme canonique de l'homographie : $u_n = \frac{\frac{1}{2}(2n-3)}{2n-3} + \frac{\frac{3}{2}-1}{2n-3} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{n-\frac{3}{2}}$

  Le tableau de variation de $f : x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{3}}{x-\frac{3}{2}}$ est :

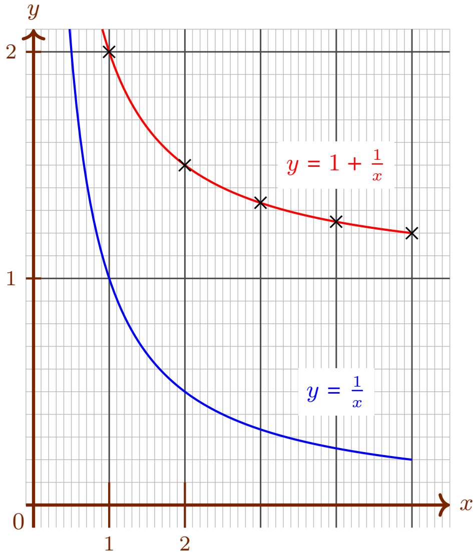
x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

  Nous voyons qui faut tenir compte de ce qui se passe avant $\frac{3}{2}$ et après $\frac{3}{2}$.

  Donc u_n est inférieur ou égale au maximum de $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_2 = 1$. Ainsi (u_n) admet un majorant égale à 1 qui est aussi un maximum.

* Si $n \geqslant 2$, clairement $u_n \geqslant 0$. Comme de plus $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_1 = 0$ nous pouvons conclure (u_n) admet un minorant égale à 0 qui est atteint c'est donc in minimum.

c) Là encore utilisons la forme canonique de l'homographie : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.



(u_n) admet un maximum égale à 2 car décroissante et est minorée (apparemment par 1) mais clairement par 0.

d) Nous ne pouvons pas pour l'instant l'établir mais cette suite n'est pas bornée les termes de rangs pairs prennent des valeurs infiniment grandes et ceux de rangs impairs infiniment petites.

e)

* $\sqrt{n^2+1} - n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2}$ et puisque la fonction racine carrée est croissante : $\sqrt{n^2+1} - n \geqslant 0$. Autrement dit (u_n) est minorée par 0.
* En utilisant l'astuce de la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2}\right)\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

Clairement (u_n) est décroissante (puisque racine carré est croissante) donc (u_n) est décroissante.

(u_n) admet un maximum qui est $u_0 = 1$.

f)

  * $u_n \geqslant 0$ car les fonctions puissances sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$ et $\pi \geqslant 3$.
  * (u_n) n'est pas majorée.

g) (u_n) est majorée par 1 qui est d'ailleurs unmmaximum. En effet :

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &\leqslant n^2 + 2n + 1 \\ \sqrt{n^2 + n + 1} &\leqslant \sqrt{(n+1)^2} \\ \sqrt{n^2 + n + 1} - 2n &\leqslant n + 1 - 2n \\ \sqrt{n^2 + n + 1} - 2n &\leqslant -n + 1 \end{aligned}$$

Nous en déduisons également que (u_n) ne sera pas minorée.

h) Bornée par -1 et 1 du fait du sinus.

i) Bornée par -1 et 1 du fait du sinus.

Exercice 2.

Démontrez que les suites suivantes sont bornées.

a) $u_n = 10 - 2\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$;

b) $u_n = \dfrac{n}{n+2}$;

c) $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 1$;

d) $u_n = 1 + \dfrac{2}{7} + \left(\dfrac{2}{7}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{2}{7}\right)^n$;

e) $u_n = 25 + 5 + 1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots + \dfrac{1}{5^n}$;

f) $u_n = 9 + 3 + 1 + \cdots + 3^{-n+2}$.

Correction de l'exercice 2

a) Puisque $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$10 - 2 \times 1 \leqslant 10 - 2\sin\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant 10 - 2 \times 1.$$

Donc

$$8 \leqslant u_n \leqslant 12.$$

b) $0 \leqslant u_n$ et, comme $n < n + 2$, $\frac{n}{n+2} < 1$ donc

$$0 \leqslant u_n < 1.$$

c)

d) Clairement $v_n \geqslant 0$.

En notant $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{2}{7}v_n$, nous remarquons que $u_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Autrement dit c'est la somme des termes d'une suite géométrique.

Donc

$$\begin{aligned} u_n &= 1 \times \frac{1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{7}} \\ &= \frac{7}{5}\left[1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right] \end{aligned}$$

De $0 \leqslant \left(\frac{2}{7}\right)^n \leqslant \frac{2}{7}$, nous déduisons : $1 \geqslant 1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} \geqslant 0$.

e) Comme la précédente question.

f) Comme la précédente question.

Exercice 3.

Déterminez si chacune des suites proposées est minorée, majorée ou bornée.

a) $u_n = \dfrac{n+3}{2n+1}$;

b) $u_n = \dfrac{n-1}{2n-3}$;

c) $u_n = \dfrac{n+1}{n}$;

d) $u_n = (-1)^n \times \dfrac{n^2}{n+1}$;

e) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$;

f) $u_n = \pi^n - 3^n$;

g) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - 2n$;

h) $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$;

i) $u_n = \sin\left(2^n \times \pi\right)$.

Correction de l'exercice 3

Dans tous les cas il faut calculer les premiers termes pour émettre une conjecture.

Avec une formule explicite il est parfois possible de deviner l'allure de la courbe représentative sans faire d'étude approfondie.

a) Clairement minorée par 0. (u_n) décroissante et $u_0 = 3$ donc majorée par 3.

b)

* En utilisant la forme canonique de l'homographie : $u_n = \frac{\frac{1}{2}(2n-3)}{2n-3} + \frac{\frac{3}{2}-1}{2n-3} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{n-\frac{3}{2}}$

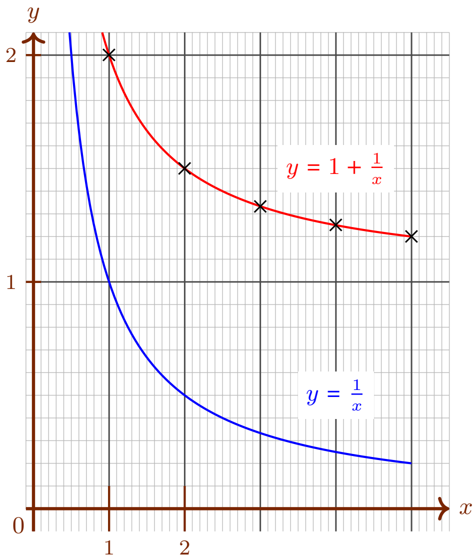
  Le tableau de variation de $f : x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{3}}{x-\frac{3}{2}}$ est :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

  Nous voyons qui faut tenir compte de ce qui se passe avant $\frac{3}{2}$ et après $\frac{3}{2}$. Donc u_n est inférieur ou égale au maximum de $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_2 = 1$. Ainsi (u_n) admet un majorant égale à 1 qui est aussi un maximum.

* Si $n \geqslant 2$, clairement $u_n \geqslant 0$. Comme de plus $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_1 = 0$ nous pouvons conclure (u_n) admet un minorant égale à 0 qui est atteint c'est donc in minimum.

c) Là encore utilisons la forme canonique de l'homographie : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.



(u_n) admet un maximum égale à 2 car décroissante et est minorée (apparemment par 1) mais clairement par 0.

d) Nous ne pouvons pas pour l'instant l'établir mais cette suite n'est pas bornée les termes de rangs pairs prennent des valeurs infiniment grandes et ceux de rangs impairs infiniment petites.

e)

* $\sqrt{n^2+1}-n = \sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2}$ et puisque la fonction racine carrée est croissante : $\sqrt{n^2+1}-n \geqslant 0$. Autrement dit (u_n) est minorée par 0.
* En utilisant l'astuce de la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Clairement (u_n) est décroissante (puisque racine carré est croissante) donc (u_n) est décroissante.
(u_n) admet un maximum qui est $u_0 = 1$.

f)

* $u_n \geqslant 0$ car les fonctions puissances sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$ et $\pi \geqslant 3$.
* (u_n) n'est pas majorée.

g) (u_n) est majorée par 1 qui est d'ailleurs unmmaximum. En effet :

$$\begin{aligned} n^2+n+1 &\leqslant n^2+2n+1 \\ \sqrt{n^2+n+1} &\leqslant \sqrt{(n+1)^2} \\ \sqrt{n^2+n+1}-2n &\leqslant n+1-2n \\ \sqrt{n^2+n+1}-2n &\leqslant -n+1 \end{aligned}$$

Nous en déduisons également que (u_n) ne sera pas minorée.

h) Bornée par -1 et 1 du fait du sinus.

i) Bornée par -1 et 1 du fait du sinus.

Exercice 4.

Démontrez que les suites suivantes sont bornées.

a) $u_n = 10 - 2\sin\left(\frac{1}{n}\right)$;

b) $u_n = \frac{n}{n+2}$;

c) $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 1$;

d) $u_n = 1 + \frac{2}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{7}\right)^n$;

e) $u_n = 25 + 5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$;

f) $u_n = 9 + 3 + 1 + \cdots + 3^{-n+2}$.

Correction de l'exercice 4

a) Puisque $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$10 - 2 \times 1 \leqslant 10 - 2\sin\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant 10 - 2 \times 1.$$

Donc

$$8 \leqslant u_n \leqslant 12.$$

b) $0 \leqslant u_n$ et, comme $n < n+2$, $\frac{n}{n+2} < 1$ donc

$$0 \leqslant u_n < 1.$$

c)

d) Clairement $v_n \geqslant 0$.

En notant $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{2}{7}v_n$, nous remarquons que $u_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Autrement dit c'est la somme des termes d'une suite géométrique.

Donc

$$\begin{aligned} u_n &= 1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{7}} \\ &= \frac{7}{5}\left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right] \end{aligned}$$

De $0 \leqslant \left(\frac{2}{7}\right)^n \leqslant \frac{2}{7}$, nous déduisons : $1 \geqslant 1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} \geqslant 0$.

e) Comme la précédente question.

f) Comme la précédente question.

II Limites infinies.

1 Définition des limites infinies.

Définition 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet pour limite* $+\infty$ si et seulement si : quelque soit $A \in \mathbb{R}$, $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Remarques.

1. Quelque soit le majorant A supposé de la suite, on se rend compte qu'il n'y a qu'un nombre fini de termes qui soient plus petits.
2. Nous avons également la définition en $-\infty$.
   Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet pour limite* $-\infty$ si et seulement si : quelque soit $A \in \mathbb{R}$, $]-\infty, A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Exemples.

1. Démontrons que la suite définie par $u_n = n$ tend vers $+\infty$.

   Soit $A \in \mathbb{R}$.
   Notons $N = \lfloor A \rfloor + 1$.
   Si $n \geqslant N$ alors

   $$\begin{aligned} n &\geqslant \lfloor A \rfloor + 1 \\ &> A \end{aligned}$$

   Autrement dit $n \in]A; +\infty[$.
   À partir du rang N tous les termes de la suite sont dans $]A, +\infty[$.

   Quelque soit le réel A l'intervalle $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
   Autrement dit :

   $$\boxed{(n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } +\infty.}$$

2. La suite arithmétique définie par $u_n = 2n - 3$ tend vers $+\infty$.
3. La suite arithmétique définie par $u_n = -3n - 5$ tend vers $-\infty$.

2 Une condition nécessaire.

Proposition 1

(i) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors (u_n) n'est pas majorée.

(ii) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors (u_n) n'est pas minorée.

3 Une condition suffisante.

Proposition 2 - Limite et monotonie.

(i) Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

(ii) Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

4 Des suites de référence.

Proposition 3 - Suites puissances.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty.$$

Proposition 4 - Suite racine carrée.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

Proposition 5 - Suite exponentielle.

Si $q > 1$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{q}^n = +\infty.$$

En particulier :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty.$$

5 Exercices.

Exercice 5.

Déterminez ou conjecturez l'éventuelle limite infinie de (u_n) dans les cas suivants (vous pourrez utiliser votre calculatrice).

a) $u_n = \frac{1}{n} + \sqrt{n}$.

b) $u_n = n^4$.

c) $u_n = 4^n$.

d) $u_n = 0,25^n$.

e) $u_n = \left(-\frac{1}{10}\right)^n$.

f) $u_n = (-3)^n$.

g) $u_n = -5n^3 + 4n^2 + n - 4$.

h) $u_n = n^6 - 4n^5 - 1000$.

i) $u_n = -\sqrt{\frac{1}{n^2}}$.

j) $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^3}$.

k) $u_n = \dfrac{4n^2 - 3n + 1}{-2n^2 + n - 5}$.

l) $u_n = \dfrac{7n^2 + n + 1}{5n^6 + n^3}$.

m) $u_n = \mathrm{e}^{n^2}$.

n) $u_n = \mathrm{e}^{-n^2}$.

o) $u_n = (-1)^n$.

p) $u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

q) $u_n = \sin(n\pi) + n^2$.

Correction de l'exercice 5

a) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d) Pas de limite infinie, suite bornée.

e) Suite bornée.

f) Pas de limite infini.

g) $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

h) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

i) Suite bornée.

j) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

k) Suite bornée.

l) Suite bornée.

m) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

n) Suite bornée.

o) Suite bornée.

p) Suite bornée.

q) Suite bornée.

Exercice 6.

Déterminez ou conjecturez l'éventuelle limite infinie de (u_n) dans les cas suivants (vous pourrez utiliser votre calculatrice).

a) $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2$.

b) $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n$.

c) $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{5}{3}u_n$.

d) $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n$.

e) $u_0 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

f) $u_0 = -12$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

g) $u_0 = -3$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{7}{4}u_n - 1$.

h) $u_0 = 6$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{7}{4}u_n - 1$.

Correction de l'exercice 6

a) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) Suite bornée.

c) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d) Pas de limite infinie et pas bornée.

e) Bornée.

f) Bornée.

g) $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

h) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 7.

Démontrez à partir de la définition les limites suivantes.

a) $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

b) $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

III Limites finies.

1 Définition.

Définition 3

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle,

. $\ell \in \mathbb{R}$.

Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ si et seulement si, quelque soit l'intervalle ouvert contenant ℓ, à partir d'un certain rang tous les termes de la suite sont dans cet intervalle.

Si c'est le cas nous noterons : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et ℓ est appelé la limite de la suite.

Exemples.

1. Toute suite stationnaire (constante à partir d'un certain rang) est convergente.
2. Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
   Nous avons déjà conjecturé en classe de première que cette suite converge vers 0.
   Démontrons-le.

   Démontrons que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

   Soient a et b des réels tels que $a < 0 < b$. Ainsi $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert contenant 0.

   * Analyse.
     Concrètement cette phase est une phase de recherche. On cherche la valeur du rang à partir duquel les termes de la suite sont dans l'intervalle I en faisant comme si on l'avait déjà trouvé.

     Supposons que nous ayons trouvé un nombre entier N à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n \geqslant N$, alors $u_n \in I$. Autrement dit :
     $$a < u_n < b.$$
     Donc :
     $$\frac{1}{n} < b,$$
     i.e., la fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$:
     $$n > \frac{1}{b}.$$

* Synthèse.
Soit $N = \left\lfloor \frac{1}{b} + 1 \right\rfloor$.
Si nous prenons n plus grand que le rang N alors :

$$n \geqslant N$$
$$n \geqslant \left\lfloor \frac{1}{b} + 1 \right\rfloor$$
$$n > \frac{1}{b}$$

Puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{n} < b$$

Comme de plus $a < 0 < \frac{1}{n}$ nous avons bien : $a < \frac{1}{n} < b$.
Autrement dit : $\frac{1}{n} \in]a, b[$.
À partir du rang N tous les termes de la suite sont dans $]a, b[$.

Quel que soit l'intervalle I contenant 0 il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I.
Autrement dit, par définition :

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

On note $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ ou $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et ℓ est appelé la limite de la suite.

Nous ne le démontrerons pas mais il y a unicité de la limite d'une suite. Par conséquent démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ équivaut à démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$.

Nous pourrons donc dire lorsqu'il y a convergence que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \ell = 0$.

Nous remarquons comme une conséquence directe de la définition que toute suite convergente est bornée. La réciproque n'est pas vraie comme le montre $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

2 Suites de référence.

Proposition 6 - Inverse des limites infinies.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

Corollaire 1 - Limites de référence.

(i) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$

(ii) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

(iii) Si $|q| > 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{q^n} = 0.$

Le troisième point du corollaire peut aussi s'écrire : si $q \in]-1;1[$ (ou encore $|q| < 1$) alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0.$

3 Exercices.

Exercice 8.

Déterminez la limite des suites suivantes.

a) $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
b) $\left(\frac{\sqrt{n}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
c) $\left(n^{12}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
d) $\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
e) $\left(3+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
f) $\left(\frac{1}{n^2}-4\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
g) $\left(\frac{1}{\pi^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
h) $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
i) $\left(\frac{n^4}{n^7}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
j) $\left(\frac{n^2\times n^{25}}{n^{-7}\times n^{26}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
k) $\left(\mathrm{e}^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
l) $\left(\mathrm{e}^{4n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
m) $\left(\frac{\mathrm{e}^{4n}\times\mathrm{e}^{-5n}}{\mathrm{e}^{-3n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
n) $\left(\frac{\mathrm{e}^{2n}}{\mathrm{e}^{4n}\times\mathrm{e}^{-2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
o) $\left(\frac{\mathrm{e}^{-2n}+\mathrm{e}^{-3n}}{\mathrm{e}^{-2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
p) $\left(\frac{2^n}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
q) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
r) $\left(\frac{\mathrm{e}^n}{\pi^n}+2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
s) $\left(\frac{5^n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 9.

Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \frac{2}{7}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}$.

1. On considère le programme suivant où M est un nombre dans $\left]0;\frac{3}{4}\right[$.

```
def programme(M):
n=0
u=2/7
while u<M:
n=n+1
u=1/3*u+1/2
return(n)
```

   Quel est l'intérêt de cet algorithme ?

2. Testez ce programme avec différentes valeurs de M, de plus en plus proche de $\frac{3}{4}$. Que remarquez-vous ?
3. Complétez la conjecture suivante : « $\frac{3}{4}$ semble le plus ... des majorants de la suite (u_n) ».
4. Montrez que, pour tout entier naturel n :
$$\frac{3}{4} - u_n = \frac{13}{28 \times 3^n}.$$
5. Pourquoi la conjecture précédente est-elle vraie ?

IV Suites, limites et comparaisons.

1 Limites finies.

Proposition 7 - Théorème des gendarmes.

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles,

. $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{array}\right. \Rightarrow \left[\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell\right].$$

Démonstration

Soient a et b deux réels tels que $a < \ell < b$.
Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $u_n \in]a, b[$.
De même il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $w_n \in]a, b[$.
Donc à partir du rang $N = \max(N_1, N_2)$, $u_n \in]a, b[$ et $v_n \in]a, b[$.
Puisque $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, forcément $v_n \in]a, b[$.
Ainsi quel que soit l'intervalle ouvert $]a, b[$ contenant ℓ, à partir d'un certain rang, cet intervalle contient tous les termes de la suite (v_n).

$$\boxed{(v_n) \text{ converge vers } \ell.}$$

■

Proposition 8 - Passage à la limite dans des inégalités (et égalités).

Soient :
. $a, b \in \mathbb{R}$,
. $\ell \in \mathbb{R}$,
. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers ℓ.

(i) $[\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant b] \Rightarrow [\ell \leqslant b]$.
(ii) $[\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant a] \Rightarrow [\ell \geqslant a]$.
(iii) $[\forall n \in \mathbb{N},\ a \leqslant u_n \leqslant b] \Rightarrow [a \leqslant \ell \leqslant b]$.

Le résultat n'est pas valable pour des inégalités strictes. Par exemple $0 < \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel non nul et pourtant $0 \nless \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$.

2 Limites infinies.

Proposition 9

Soient :
. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

(i) $\left\{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{array}\right. \Rightarrow \left[\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty\right]$.

(ii) $\left\{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{array}\right. \Rightarrow \left[\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty\right]$.

Démonstration

(i) Nous devons démontrer que (v_n) tend vers $+\infty$ avec deux hypothèses : (u_n) tend vers $+\infty$ et $u_n \leqslant v_n$ pour tout n. Nous allons établir que (v_n) vérifient la définition d'une suite divergeant vers $+\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

Démontrons que, à partir d'un certain rang, tous les termes de (v_n) appartiennent à l'ouvert $]A;+\infty[$.

Nous allons procéder en deux temps : trouver le rang N à partir duquel ça fonctionnera puis montrer qu'effectivement à partir de ce rang tous les termes de (v_n) sont dans l'intervalle. Le N nous sera donné par (u_n).
Puisque (u_n) tend vers $+\infty$, il existe un rang N pour lequel :

$$\forall n \geqslant N,\ A < u_n.$$

Or, par hypothèse :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n,$$

donc, par transitivité

$$\forall n \geqslant N,\ A < v_n.$$

Autrement dit : $v_n \in]A;+\infty[$.

$$\boxed{(v_n) \text{ tend vers } +\infty.}$$

(ii) Il suffit de considérer les suites $(-u_n)$ et $(-v_n)$ et d'appliquer le (i).

■

Exemples.

1. $\left(\sin(n) + \mathrm{e}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. ♥ La suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

3 Exercices.

Exercice 10.

Déterminez la limite de la suite (u_n) sachant que pour tout entier naturel n $4 - 0,9^n \leqslant u_n \leqslant 4 + 0,1^n$.

Exercice 11.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

1. Montrez que pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 2^n$.
2. Déduisez-en la limite de (u_n).

Exercice 12.

Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

b) $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2}$;

c) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$;

d) $u_n = \dfrac{1}{n} + 3^n$;

e) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^3}$;

f) $u_n = \dfrac{1}{6^n}$.

g) $u_n = 0,5^n + \sqrt{n}$.

h) $u_n = -n^3 - 2n^2$.

i) $u_n = n^2 + 4n + 1$.

j) $u_n = 1 + \left(\dfrac{1}{6}\right)^n + n^3$.

k) $u_n = n + (-1)^n + 1$;

l) $u_n = n^2 - \sin(n) + 1$;

m) $u_n = \sin\left(\sqrt{\cos\left(n^2 - n^n\right)}\right) - n - 1$.

n) $u_n = n! + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

o) $u_n = n! + \sqrt{n}$.

p) $u_n = \left(\dfrac{99}{100}\right)^n \sin(n)$.

q) $u_n = n^2 + 2n + (-1)^n n$.

r) $u_n = 5 - \dfrac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$.

Correction de l'exercice 12

a) $-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) $-\frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 13.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$:

$$u_n = 1 + \frac{1}{n + (-1)^n}.$$

1. Montrez que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$ on a :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

2. Déterminez les limites des suites de termes généraux :

$$\frac{1}{n+1} \text{ et } \frac{1}{n-1}.$$

3. Concluez quant à la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 14.

Démontrez que si $q \in]-1;1[$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Exercice 15.

Exercice 16.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Écrivez un algorithme permettant de calculer les termes $u_0, \ldots, u_n$, où n est un entier saisi à la demande.
2. Programmez le précédent algorithme, exécutez-le puis donnez les termes u_1 à u_{10}.
3. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. (a) Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

   (b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Conjecturez une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n nombre entier naturel, puis démontrez la propriété ainsi conjecturée.

Correction de l'exercice 16

1.

```
def termessuite(n):
  u=[1]
  for i in range(1,n+1):
    u=u+[u[i-1]+2*(i-1)+3]
  return(u)
```

2. $u_1 = 4$, $u_2 = 9$, $u_3 = 16$, $u_4 = 25$, $u_5 = 36$, $u_6 = 49$, $u_7 = 64$, $u_8 = 81$, $u_9 = 100$, $u_{10} = 121$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   D'après la formule de récurrence : $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$ donc

   (u_n) est strictement croissante.
4. (a) Par récurrence.
   Remarquons que dans ce cas nous aurions du mal à définir une fonction f telle que $u_{n+1} = u_n$.
   Clairement : $n^2 + 2n + 3 > n^2$.

   (b) $n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $u_n > n^2$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
5. $u_n = (n+1)^2$.

V Suites, opérations sur les limites.

1 Devinez.

Conjecturez les limites des suites dont les termes généraux sont : $n^3 + n^2$, $\frac{1}{1+0{,}5^n}$, $-n^7 + n^2$, $\frac{n^3+n^2}{n^4+n}$, $\frac{n^3}{0{,}5^n}$.

La définition de la convergence permet d'établir la convergence de quelques suites de référence. Pour le reste nous ferons, ce que nous avions déjà fait pour les fonctions dérivées, à savoir obtenir de nouveaux résultat en combinant ceux déjà connus.

2 Somme.

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on s'intéresse à la convergence de la suite somme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de celles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

v_n \ u_n	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
m	$m+\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Les situations avec des "?" sont appelées des formes indéterminées. Nous ne pouvons pas déterminer si il y a ou non une limite. Il faudra faire des études plus approfondies.

Exemples.

1. 3 est une suite constante (donc qui converge vers 3) et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0 donc $\left(3+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 3.
2. $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0 et $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$ donc $\left(\frac{1}{n}+\sqrt{n}\right)$ tend vers $+\infty$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+\sqrt{n} = +\infty$.

3 Produit.

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on s'intéresse à la convergence de la suite produit $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de celles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

v_n \ u_n	$\ell > 0$	$\ell = 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$m = 0$	0	0	0	?	?
$m < 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exemples.

1. -2 est une suite constante (donc qui converge vers -2 et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui diverge vers $+\infty$ donc $(-2\times n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -1\times n^2 = -\infty$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n} = +\infty$.

4 Inverse.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont les termes sont tous non nuls.

u_n	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\frac{1}{u_n}$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$

Exemples.

1. Nous pouvons, sachant que $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, retrouver que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+n} = 0$.
3. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n} > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n}} = +\infty$.

5 Quotient.

Les résultats concernant les suites obtenues comme quotient de deux autres suites découlent des résultats sur les produits et les inverses.

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on s'intéresse à la convergence de la suite produit $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de celles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

u_n \ v_n	$\ell > 0$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$\frac{m}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{m}{\ell}$	0	0
$m = 0$	0	?	?	0	0	0
$m < 0$	$\frac{m}{\ell}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{m}{\ell}$	0	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	?

6 Lever l'indétermination.

Les règles sur les opérations se confrontent souvent à des situations de limite indéterminée.

Pour cette année, le plus efficace est très souvent de factoriser par la plus grande puissance de n apparaissant dans l'expression du terme général de la suite.

Exemples.

1. Si $u_n = n^3 - n$ alors *a priori* c'est une forme indéterminée. Factorisons par n^3 : $u_n = n^3\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. Avec cette expression il n'y a plus de forme indéterminée : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. $u_n = \frac{2n+1}{3n+7}$ correspond à une forme indéterminée, mais, en factorisant par n au numérateur et au dénominateur : $u_n = \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{7}{n}}$.

   Or $\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n} = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} 3+\frac{7}{n} = 3$ donc (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

3. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ est une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination dans cette expression radicale on utilise les expressions conjuguées. $u_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$.

7 Exercices.

Exercice 17.

Déterminez les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n^2 + n + \dfrac{1}{n}$.

b) $u_n = \sqrt{n}\left(n^2 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

c) $u_n = \dfrac{4}{\sqrt{n}+n}$.

d) $u_n = n^3 + n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

e) $u_n = 5n^2 + 3n\sqrt{n}$.

f) $u_n = \sqrt{n}(2 - n - 2n^2)$.

g) $u_n = \dfrac{1}{n^2+n-1}$.

h) $u_n = n^2\left(\dfrac{2}{n+1} - 1\right)$.

i) $u_n = \dfrac{3}{n}\left(\dfrac{3}{n^3} - 5\right)$.

j) $u_n = \dfrac{3}{1-2n} - \dfrac{2}{1-3n}$.

k) $u_n = 2 - \dfrac{3}{6+\sqrt{n}}$.

l) $u_n = 2 - n\sqrt{5n} + \dfrac{1}{n^2+1}$.

m) $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

n) $u_n = n(n-4)(1-\sqrt{n})$.

o) $u_n = -\mathrm{e}^{1/n^2} n^4$.

p) $u_n = -\mathrm{e}^{1/n^2} n^{-4}$.

Correction de l'exercice 17

a) $+\infty$.

b) $+\infty$.

c) 0.

d) $+\infty$.

e) $+\infty$.

f) $-\infty$.

g) 0.

h) $-\infty$.

i) 0.

j) 0.

k) 2.

l) $-\infty$.

m) $+\infty$.

n) $-\infty$.

o) $-\infty$.

p) 0.

Exercice 18.

Identifier parmi les suites dont le terme général est donné ci-après, les situations conduisant à une forme indéterminée lors de l'étude de la convergence, sinon donnez la limite.

On peut schématiquement résumer les formes indéterminées par :

$$(+\infty)-(+\infty), \quad (-\infty)-(-\infty), \quad 0\times\infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{}{0^?}.$$

a) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2^n}$.

b) n^2-6^n.

c) $\sqrt{n^{-1}}+n!$.

d) $2^{-n}+\sqrt{n}$.

e) $n^{12}+\dfrac{1}{n^{100}}$.

f) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}+n!+1$.

g) $n^2 3^n$.

h) $\dfrac{n^2}{n^{12}}$.

i) $\dfrac{n!}{2^n}$.

j) $n^{-2}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$.

k) $\dfrac{n^{-3}}{\sqrt{n}}$.

l) $n^5 2^{-n}$.

m) $n^{-3}+0,5^n\sqrt{n}$.

n) $\dfrac{1}{n^4}\times \mathrm{e}^n+4$.

o) $\dfrac{\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}$.

Correction de l'exercice 18

a) 0.

b) Indéterminée.

c) $+\infty$.

d) $+\infty$.

e) $+\infty$.

f) $+\infty$.

g) Indéterminée.

h) Indéterminée.

i) Indéterminée.

j) Indéterminée.

k) 0.

l) Indéterminée.

m) Indéterminée.

n) Indéterminée.

o) Indéterminée.

Exercice 19.

Déterminez, si possible la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

a) $n^7 + 12$.

b) $4^n - 7$.

c) $n^3 + \dfrac{0,1^n}{\sqrt{n}}$.

d) $\dfrac{1}{n} + 4$.

e) $n^{-4} + \sqrt{n}$.

f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2 + \dfrac{1}{n^2}$.

g) $n!n^2 + 2 - \dfrac{1}{n^2}$.

h) $\dfrac{\sqrt{n}}{2 + \mathrm{e}^{-n}}$.

i) $\dfrac{n^4 + 1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 4}$.

j) $\dfrac{n \times 2^n}{3 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}$.

k) $n! - \left(2 - n^2\right)$.

l) $n^2\left(n^3 + \dfrac{3}{\sqrt{n}} + 1\right)$.

m) $2n^3 + 5n^2 + n - 12$.

n) $-5n^3 - 2n^2 - 12n - 3$.

o) $4n^2 - n + 1$.

p) $\dfrac{n^3}{n^2}$.

q) $n^2 + 3^n + 4 - \dfrac{1}{n}$.

Correction de l'exercice 19

a) $+\infty$.

b) $+\infty$.

c) $+\infty$.

d) 4.

e) $+\infty$.

f) 2.

g) $+\infty$.

h) $+\infty$.

i) $-\infty$.

j) $+\infty$.

k) $+\infty$.

l) $+\infty$.

m) $+\infty$.

n) $-\infty$.

o) Indéterminée. $4n^2 - n + 1 = n^2(4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$. $+\infty$.

p) Indéterminée. $\frac{n^3}{n^2} = n$. $+\infty$.

q) $+\infty$.

Exercice 20.

Déterminez les limites en levant l'indétermination.

a) $u_n = n^3 - n + 5$.

b) $u_n = n^4 - n^2 + 1$.

c) $u_n = 3n\sqrt{n} - 2n^3$.

d) $u_n = \dfrac{n-3}{n+1}$.

e) $u_n = \dfrac{n^2 - \sqrt{n}}{n+3}$.

f) $u_n = \dfrac{n^2 - n + 4}{3n^2 - 2n + 5}$.

g) $u_n = \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3 + 8}$.

h) $u_n = n\sqrt{n^2 + 3} - n^2$.

i) $u_n = n^2 - 3n$.

j) $u_n = 4n^3 - 3n^2 + 2$.

k) $u_n = 3n^4 - 3n^3 - 2n + 1$.

l) $u_n = \dfrac{4n-1}{3n+1}$.

m) $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$.

n) $u_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + n + 1}$.

o) $u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$.

p) $u_n = \sqrt{5n+4} - \sqrt{5n+2}$.

q) $u_n = \sqrt{4n^2 + n + 3} - 2n$.

r) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2}}$.

s) $u_n = n - \dfrac{n^2}{n+1}$.

t) $u_n = \dfrac{n-3}{2n+1} - \dfrac{n+3}{3n-1}$.

u) $u_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2}{n+2}$.

v) $u_n = \dfrac{n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$.

w) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{n}$.

x) $u_n = \sqrt{n - \sqrt{n}} - \sqrt{n}$.

Correction de l'exercice 20

a) $+\infty$.

b) $+\infty$.

c) $-\infty$.

d) 1.

e) $+\infty$.

f) $\frac{1}{3}$.

g) 0.

h) $+\infty$.

i) $+\infty$.

j) $+\infty$.

k) $+\infty$.

l) $\frac{4}{3}$.

m) 1.

n) $\frac{2}{3}$.

o) 0.

p) 0.

q) $\frac{1}{4}$.

r) $-\infty$.

s) 1.

t) $\frac{1}{6}$.

u) 1.

v) 1. Problème limite sous racine carré.

w) 0.

x) $-\frac{1}{2}$

Exercice 21.

- Centres étrangers groupe 2 sujet 1 21 mars 2023. Arbre probabiliste, suites, limites.
- Baccalauréat S Métropole 23 juin 2009

Exercice 22. épisode 1.

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distincts, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à $0,84$;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à $0,76$.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

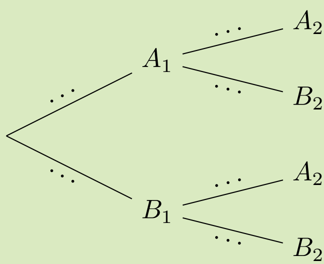
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

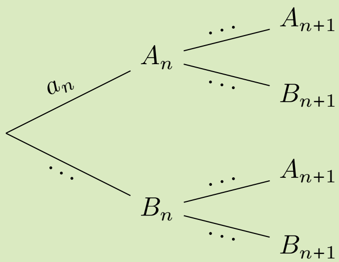
Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



Exercice 22. épisode 2.

2. (a) Calculer a_2.
   (b) Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.
3. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



   (b) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.
5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

VI Suites, limite monotone.

Les résultats vus dans cette leçon permettent de lever certaines indéterminations mais surtout de savoir si une suite converge ou pas, sans pour autant être forcément capable de trouver l'éventuelle limite. Un résultat souvent nécessaire pour les suites définies par récurrence.

1 Limite finie.

Proposition 10 - Théorème de la limite monotone.

(i) Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.
(ii) Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.

Remarques.

1. Contrairement au théorème des gendarmes, celui-ci ne permet pas de connaître la limite mais uniquement son existence.
2. L'utilisation de ce résultat se prolonge en général par une recherche d'encadrement de la limite par divers procédés notamment algorithmiques.
3. En général la limite n'est pas le majorant ou le minorant.

2 Limite infinie.

Proposition 11 - Théorème de la limite monotone.

(i) Toute suite réelle croissante et non majorée a pour limite $+\infty$.

(ii) Toute suite réelle décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$.

Démonstration

(i) Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

Démontrons que, à partir d'un certain rang, tous les termes de (u_n) sont dans $]A, +\infty[$.

Puisque (u_n) n'est pas majorée par A il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_N > A$.
Et comme (u_n) est croissante :

$$\forall n \geqslant N,\ u_n > A.$$

Autrement dit à partir de ce rang N tous les termes de la suite sont dans $]A, +\infty[$.

(u_n) tend vers $+\infty$.

(ii)

■

3 Passer à la limite dans une égalité.

Nous avons vu qu'il est possible de passer à la limite dans une somme ou un produit : si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers m alors $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + m$ et $(u_n v_n)$ converge vers ℓm. Qu'en est-il pour la suite $(\sqrt{u_n})$, ou e^{u_n}, ou, plus généralement, $(f(u_n))$?

Nous verrons plus tard un résultat qui nous autorise à passer à la limite si la fonction f n'est pas trop inhabituelle. Souvent $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n)$.

Nous utiliserons souvent ce résultat pour les suites définies par récurrence car alors (u_{n+1}) et (u_n) ont la même limite ℓ : si $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}+1$ alors $\ell = \sqrt{\ell + 3}+1$.

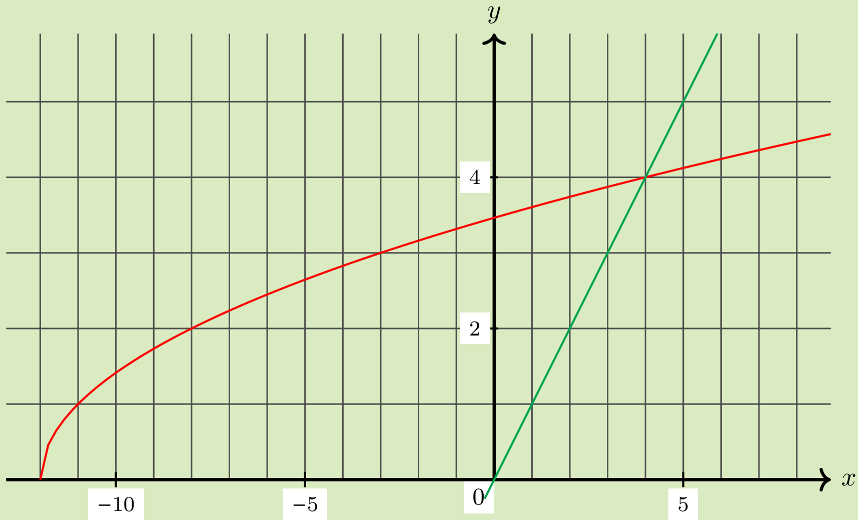
4 Exercices.

Exercice 23.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}.$$

1. Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$.
2. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-12; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x + 12}$.



   Construisez les premiers de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et conjecturez son comportement.
3. (a) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - 4 \leqslant \frac{1}{4}(u_n - 4).$$

   (b) Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - 4 \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}.$$

4. Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on précisera.

Exercice 24.

On considère la suite $u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

1. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 4.
3. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. En passant à la limite dans la formule de récurrence, démontrez que la limite ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être que 4.
5. Concluez.

Exercice 25. C

Posons $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.
Nous admettrons (récurrence immédiate) que la suite est à termes positifs.

1. Montrez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que (u_n) est majorée par 3.
3. Déduisez-en que (u_n) converge et montrez que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Exercice 26.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Prouvez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $u_{2^m+1} - u_{2^m} \geqslant \frac{1}{2}$.
3. Déduisez-en que (u_n) n'est pas majorée. Concluez.
4. Déterminez avec une machine un entier N tel que $u_N > 10$.

Exercice 27.

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2.$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1,4x - 0,05x^2.$$

   (a) Étudiez les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.

   (b) Représentez graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec le centimètre comme unité graphique, ainsi que les 10 premiers termes de la suite (v_n).

   (c) Conjecturez son comportement.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$2 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8.$$

3. Déduisez-en que la suite (u_n) admet une limite finie.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrez que

$$f(x) - 8 = -0,05(x-20)(x-8).$$

   (a) Pour tout entier naturel n :

$$8 - v_{n+1} \leqslant 0,9 \times (8 - v_n).$$

   (b) Déduisez-en que, pour tout entier naturel n :

$$8 - v_n \leqslant 6 \times 0,9^n.$$

   (c) Concluez.

Exercice 28.

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de $1,8$ mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de $30\,\%$ par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   (c) Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6-u_n$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,7$ dont on précisera le premier terme.
   (b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
   (c) Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à $5,5$ mg.
   Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

Exercice 29.

Un démographe étudie l'évolution de la population d'un pays.
Depuis 1969 (cette année-là, ce pays comptait 44 500 000 habitants), il constate qu'en moyenne la population a un taux de natalité de 35 pour mille et un taux de mortalité de 17 pour mille.
À ces variations, il faut ajouter 25 000 nouveaux arrivant dans ce pays et retirer 9 000 citoyens qui partent définitivement.
On note p_n la population de $1969 + n$, exprimée en milliers d'habitants.

1. Déterminez p_0.
2. Démontrez que pour tout entier naturel n :

$$p_{n+1} = 1,018p_n + 16.$$

3. Déterminez le réel ℓ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_n = p_n - l$$

soit géométrique.

4. Déduisez-en les expressions de u_n et p_n en fonction de n entier naturel.
5. Combien d'habitants peut-on prévoir en 2012 ?
6. Au bout de combien d'années la population va-t-elle tripler, par rapport à celle de 1969 ?

Correction de l'exercice 29

1. $p_0 = 44500$.
2. Pas des maths, de la modélisation $p_{n+1} = \left(1 + \frac{35}{1000} - \frac{17}{1000}\right) \times p_n + 25 - 9$.
3. Une astuce pour trouver l : c'est forcément un point fixe de la formule de récurrence.
   $u_{n+1} = p_{n+1} - l = 1,018p_n + 16 - l = 1,018\left(p_n + \frac{16-l}{1,018}\right)$ donc $\frac{16-l}{1,018} = -l \iff l = -\frac{16}{0,018} \iff l = -\frac{8000}{9}$.
4. $u_n = u_0 \times 1,018^n = (44500 + \frac{8000}{9}) \times 1,018^n$.
   $p_n = (44500 + \frac{8000}{9}) \times 1,018^n - \frac{8000}{9}$.
5. $u_{43} \approx 96858,23903$.

Exercice 30.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculez u_1, u_2 et u_3.
2. (a) Écrivez un algorithme qui, pour une valeur $M \in \mathbb{R}$ donnée, renvoie un entier n pour lequel $u_n > M$.
   (b) Programmez cet algorithme à l'aide d'une calculatrice, puis exécutez-le pour des valeurs de M telles que 101, 100, 1 000.
   (c) Déduisez-en une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) à l'infini.
3. Démontrez que pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 4$ alors :
$$u_n \geqslant 0.$$
4. Démontrez que, pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 5$ alors :
$$u_n \geqslant n - 3.$$
5. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

Exercice 31. Partie A.

On définit :

. la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5};$$

. la suite (S_n) pour tout entier naturel n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. Montrez par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}.$$

   Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

2. (a) Déterminez le sens de variation de la suite (S_n).
   (b) Calculez (S_n) en fonction de n.
   (c) Déterminez la imite de la suite (S_n).

Exercice 31. Partie B.

Étant donnée une suite (x_n), de nombres réels définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) défine par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Indiquez pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse ; justifiez dans chaque cas.
Proposition 1 : « si la suite (x_n) est convergente alors la suite (S_n) l'est aussi.
Proposition 2 : les suites (u_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

Exercice 32.

Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n \geqslant 20$.

   (b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0,045\,(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n).

   (c) Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = T_n - 20$.

   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$.

   (c) Calculer la limite de la suite (T_n).

   (d) Résoudre l'inéquation $T_n \leqslant 120$ d'inconnue n entier naturel.

3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.

   On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180° C et celle de l'air ambiant de 20° C.

   La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n). Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

   (a) Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.

   (b) On considère la fonction Python ci-dessous :

   ```
   def temp(x) :
       T = 180
       n = 0
       while T > x :
           T=0.955*T+0.9
           n=n+1
       return n
   ```

   Donner le résultat obtenu en exécutant la commande temp(120).

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Correction de l'exercice 32

1. (a) Hérédité : $x \mapsto 0,955 + 0,9$ est croissante.

   (b) $T_{n+1} - T_n = -0,045(T_n - 20) \leqslant 0$ suite décroissante.
   (c) Décroissante et minorée par 20 donc convergente.
2. (a) Raison $0,955$.
   (b)
   (c) $\lim_{n\to+\infty} 0,955^n = 0$ car $0,955 \in]-1;1[$.
   (d) $T_n \leqslant 120 \Leftrightarrow 0,955^n \leqslant \frac{120-20}{160} \Leftrightarrow n \geqslant \ln\left(\frac{120-20}{160}\right)$ ou à la calculatrice 11.
3. (a)
   (b) Temps d'attente en minutes pour obtenir une température inférieure à 120°.

Exercice 33. épisode 1.

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à $0,84$;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à $0,76$.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

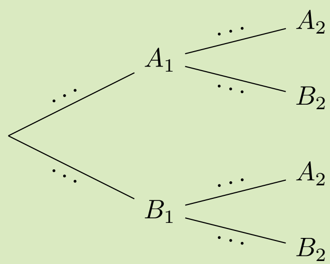
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

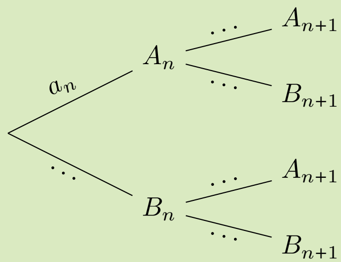
Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



Exercice 33. épisode 2.

2. (a) Calculer a_2.
   (b) Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.
3. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



   (b) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.
5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 34.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Prouvez que (u_n) est croissante et majorée puis concluez.
Pour établir la majoration on établira ; pour tout entier $k > 1$:

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Exercice 35.

Montrez que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ converge.

Exercice 36. Nombre d'Apéry

On pose pour tout entier supérieur ou égale à 1 :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}.$$

1. Justifiez que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrez à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

3. Qu'en conclure ?
4. Soit $\varepsilon > 0$.
   Écrivez un algorithme qui renvoie une valeur approchée à ε près de la limite de la suite (u_n).

Exercice 37.

— Baccalauréat S Liban 28 mai 2013. Exercice 4.
— Baccalauréat S Polynésie 7 juin 2013. Exercice 4.
— Baccalauréat S Asie 18 juin 2013 Exercice4.