01 Raisonnement par récurrence.

I Logique : propositions, assertions.

II Le théorème du raisonnement par récurrence.

III Exercices.

Exercice 1.

Montrer que les propositions suivantes sont vraies pour tout entier naturel n.

1. $2^{n+4} + 3^{3n+2}$ est divisible par 5.
2. $3^{6n+2} - 2$ est divisible par 7.
3. $n^3 - n$ est divisible par 3.
4. $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9.
5. $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

Exercice 2.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$.
Démontrez, pour tout entier naturel n, que :

$$u_n = 5\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right).$$

Exercice 3.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 5$ et, pour $n \geqslant 2$: $u_n = 2u_{n-1} - n$.
Démontrez, pour tout entier naturel non nul n, que :

$$u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n.$$

Exercice 4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + n + 1$.
Démontrez, pour tout entier naturel n, que :

$$u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}.$$

Exercice 5.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = \frac{1}{4} \text{ et } u_{n+1} = 5u_n - 1.$$

1. Calculez les trois premiers termes de la suite (u_n).
2. Conjecturez son expression explicite.
3. Démontrez la.

Exercice 6.

On définit par récurrence la *factorielle* d'un entier naturel n et que l'on note $n!$ de la façon suivante :

$$0! = 1 \text{ et } (n+1)! = (n+1) \times n!.$$

Démontrez que pour tout entier n supérieur ou égale à 1, $n! = 1 \times \cdots \times n$.

Exercice 7.

Montrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = -2$ est croissante.

Exercice 8.

Montrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2020$ est décroissante.

Exercice 9.

Montrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \dfrac{2}{3 - u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1,8$ est bornée par 1 et 2 et décroissante.

Exercice 10.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $g(x) = 2x - x^2$.

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

2. Calculer u_1 et u_2.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et bornée.

Exercice 11.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = 2xe^{-x}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;1]$.

1. Résoudre sur l'intervalle $[0;1]$ l'équation $f(x) = x$.
2. (a) Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;1]$, $f'(x) = 2(1-x)e^{-x}$.
   (b) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est croissante et bornée.

Exercice 12.

On considère la proposition suivante :

$$\mathscr{P}(n) : \text{ « 9 divise } 10^n + 1 \text{ ».}$$

1. Démontrez, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
2. Qu'en est-il de $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$, $\mathscr{P}(2)$ et $\mathscr{P}(3)$? Que semble-t-il légitime de conjecturer ?
3. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: 9 divise $10^n - 1$.
4. Déduisez-en à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est fausse.

Exercice 13.

Exprimez en fonction de n les sommes données.

a) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(4p-1)$.

b) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}(3p+5)$.

c) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

d) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n+1}3\times 5^{-n}$.

e) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}p(p+1)$.

f) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n+1}(p-2)^{2}$.

g) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}3^{2p+1}$.

h) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}3\times 2^{p}-1$.

Exercice 14.

Exprimez les sommes suivantes à l'aide du symbole Σ, puis calculez-les.

a) $S = 5+8+11+14+\cdots+2\,012$.

b) $T = 2^2+2^5+2^8+\cdots+2^{20}$.

c) $R = 1+10^{-2}+10^{-4}+\cdots+10^{10}$.

d) $U = x+x^2+x^3+\cdots+x^n$, pour $x\in\mathbb{R}$.

e) $V = 1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}$, pour $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 15.

Montrez, pour tout entier naturel n, que :

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}i^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Exercice 16.

Démontrer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, que :

$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{i=0}^{n-1}a^{n-1-i}b^i.$$

Aide. Pour l'hérédité on utilisera le fait que : $a^{n+1}-b^{n+1}=a\times a^n-b\times b^n$ et $a=(a-b)+b$.

Exercice 17.

Exercice 18.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_1 = u_2 = 1 \text{ et } u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n.$$

Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = (-2)^n - 3 \times (-1)^n.$$

Exercice 19. D

Soit I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.

Montrez que, si la fonction f vérifie la propriété :

$$\mathscr{P} : \text{ « pour tout } x \in I,\ f(x) \in I \text{ »},$$

alors on peut définir sur $\mathbb{N}$ la suite numérique (u_n) de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

De plus, la suite numérique (u_n) vérifie la propriété :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in I.$$

Exercice 20. D

Soient $f : I \to I$ une fonction une fonction croissante, $u_0 \in I$ et (u_n) la suite définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Démontrez que, si $u_0 > u_1$, alors (u_n) est décroissante.

Exercice 21. D

— Baccalauréat S Métropole 12 septembre 2013 Exercice 4