01 Raisonnement par récurrence.

I Logique : propositions, assertions.

Dans l'axiomatique classique, le raisonnement par récurrence est un théorème de logique. Cependant nous l'accepterons comme un axiome, un principe.

Une *proposition*, en mathématique, peut désigner un résultat toujours vrai (comme un théorème) ou une phrase (assertion) qui peut être soit vraie soit fausse. Dans la suite de ce chapitre nous l'utiliserons pour désigner une assertion.

Exemples.

1. La proposition « le carré de -3 est négatif » est fausse.
2. La proposition $\mathscr{P}$: « $\sqrt{2}$ est irrationnel » est vraie.
3. La négation de la proposition $\mathscr{P}$: « $x \geqslant 5$ » est $\overline{\mathscr{P}}$: « $x < 5$ ».

Certaines propositions sont des propriétés universelles, c'est-à-dire des propositions qui dépendent d'un élément x appartenant à un ensemble. Ce sont des phrases qui contiennent le plus souvent les expressions « quel que soit » ou « pour tout » ou le quantificateur universel $\forall$.

Pour démonter qu'une proposition universelle est fausse il suffit de trouver un contre-exemple.

Exemples.

1. La proposition $\mathscr{P}(x)$: « $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$ » est une proposition qui est vraie quel que soit $x \in]0;1[$.
2. « Pour tout $x \in]0;2[$, on a $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$ » est une proposition qui est fausse puisque, par exemple, pour $x = 1$, on a $\frac{1}{1} = \frac{1}{1^2}$.
3. L'assertion $\mathscr{P}(n)$: « $4^n - 1$ est un multiple de 3. » est vraie pour tout nombre entier naturel n. Cependant la démonstration n'est pour l'instant pas aisée.

Certaines proposition contiennent des implications (appelées aussi conditions nécessaires) le plus souvent sous la forme « si ..., alors ... ».

Exemples.

1. « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est impair alors n^2 est impair. » est une assertion qui est vraie.

   Démontrons-le.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   Supposons que n est impair et démontrons qu'alors forcément n^2 est aussi impair.

Puisque n est impair il peut s'écrire $n = 2k + 1$ où k est un certain entier.
Donc :

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2 \times 2k^2 + 2 \times 2k + 1 \\ &= 2 \times (2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

Ainsi n^2 est de la forme $2p + 1$ où p est un nombre entier. Autrement dit n^2 est impair.

Concluons : nous avons démontré que, quel que soit l'entier n, si n est impair, alors, nécessairement, n^2 est aussi impair.

II Le théorème du raisonnement par récurrence.

Le raisonnement par récurrence est un procédé qui permet de démontrer des propriétés universelles, $\mathscr{P}(n)$, qui dépendent d'entiers naturels n.

La montée de l'échelle. Si j'affirme : « si on met un pied sur un barreau de l'échelle, alors on met, obligatoirement, l'autre pied sur le barreau supérieur » alors, pour peu que l'on mette un pied sur le barreau d'en bas il faudra grimper toute l'échelle.

Théorème 1

Soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n.

Si les deux assertions suivantes sont vraies

(i) $\mathscr{P}(0)$ est vraie,

(ii) quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie alors, forcément, $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie,

alors les assertions $\mathscr{P}(n)$ sont vraies pour tous les entiers naturels n.

Remarques.

1. L'assertion (i) est appelée *l'initialisation*.
2. L'assertion (ii) est appelée *l'hérédité*.
3. L'initialisation commence avec $n = 0$ mais, comme pour les suites, il possible de commencer avec un autre rang.

4. Ce théorème, comme le théorème de Pythagore, est une implication. Pour le théorème de Pythagore il faut d'abord vérifier que ABC est rectangle en A pour pouvoir affirmer que l'égalité $BA^2 + AC^2 = BC^2$. De même pour utiliser le raisonnement par récurrence il faut vérifier que l'initialisation et l'hérédité sont vraies avant de pouvoir affirmer que toutes les assertions sont vraies.
5. L'assertion de l'hérédité contient à la fois une propriété universelle et une implication nous adopterons systématiquement la rédaction :

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   ...

   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
6. Lorsqu'on écrit « Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie » on signifie que l'on admet que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Le fait que « $\mathscr{P}(n)$ est vraie » est appelée *l'hypothèse de récurrence.*
7. Le raisonnement par récurrence ne permet pas de trouver un nouveau résultat mais il permet de démontrer qu'une conjecture est vraie.

Exemples.

1. Démontrer une propriété.

   Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $4^n - 1$ est divisible par trois ».

   Démontrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ en raisonnant par récurrence.

   * Initialisation. Il s'agit de démontrer que $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Autrement dit que $4^0 - 1$ est divisible par 3.

     $4^0 - 1 = 0$ et $3 \times 0 = 0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ st vraie.
   * Hérédité.

     Soit $n \in \mathbb{N}$.

     Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

     Nous devons donc démontrer que $4^{n+1} - 1$ est un multiple de 3.

     $$4^{n+1} - 1 = 4 \times (4^n - 1) + 3$$

     D'après l'hypothèse de récurrence : $3 | 4^n - 1$.

     Autrement dit il est possible d'écrire : $4^n - 1 = 3 \times k$ où k est un nombre entier.

     Donc

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4 \times 3k + 3 \\ &= 3(4k+1) \end{aligned}$$

Autrement dit $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré en raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 4^n - 1 \text{ est divisible par } 3.}$$

2. Démontrer une formule. Ici la somme des entiers naturels jusqu'à n.
Soit $\mathscr{P}(n)$: « $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

* $0 = \frac{0 \times 1}{2}$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
* Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = n + 1 + \sum_{k=0}^{n} k$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k &= n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(2+n)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

3. Démontrer la formule explicite du terme terme général d'une suite.
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$.
   Nous souhaitons démontrer que $u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Notons $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$ ».

   Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

   *

4. Démontrer qu'une suite définie par récurrence est croissante.
   Étudions la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.
5. Démontrer un encadrement.
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$.
   Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 \leqslant u_n \leqslant 3$.
6. Démontrer une inégalité.
   Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $2n+1 \leqslant 2^n$ » est vraie.

7. De la nécessité de l'initialisation.
   $\mathscr{P}(n)$: « $4^n + 1$ est divisible par 3 ».

   * Soit $n \in \mathbb{N}$.
     Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n + 1 = 3k$ donc :

$$\begin{aligned}4^{n+1} - 1 &= 4 \times (4^n + 1) - 4 + 1\\ &= 4 \times 3k - 3\\ &= 3(4k-1)\end{aligned}$$

     Autrement dit $4^{n+1} + 1$ est divisible par 3.
   * $4^0 + 1 = 1$ et $3 \nmid 1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est fausse.

   Nous remarquons que l'hérédité ne suffit pas à démontrer que toutes les propositions sont vraies.
   Nous pourrions même démontrer par l'absurde que 4^n+1 n'est jamais divisible par 3.

8. Inégalité de Bernoulli.

   Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{B}(n)$: « ♥ pour tout nombre $x \geqslant 0$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$. »

   * Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
     D'une part : $(1+x)^0 = 1$
     d'autre part : $1 + 0 \times x = 1$,
     donc : $(1+x)^0 \geqslant 1 + 0 \times x$.
     $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   * Soit $n \in \mathbb{N}$.
     Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
     Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
     D'après l'hypothèse de récurrence :

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$

     Puisque $(1+x) \geqslant 0$:

$$(1+x)^{n+1} \geqslant (1+x)(1+nx)$$

     En développant le membre de droite :

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x+nx^2 \quad (1)$$

     Or, puisque $nx^2 \geqslant 0$,

$$1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x \quad (2)$$

     donc, par transitivité entre (1) et (2) :

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$$

     Autrement dit $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   * Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ (1=x)^n \geqslant 1+nx.}$$

III Exercices.

Exercice 1.

Montrer que les propositions suivantes sont vraies pour tout entier naturel n.

1. $2^{n+4} + 3^{3n+2}$ est divisible par 5.
2. $3^{6n+2} - 2$ est divisible par 7.
3. $n^3 - n$ est divisible par 3.
4. $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9.
5. $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

Correction de l'exercice 1

1.
$$\begin{aligned} 2^{(n+1)+4} + 3^{3(n+1)+2} &= 2^{n+5} + 3^{3n+5} \\ &= 2 \times 2^{n+4} + 3^{3n+5} \end{aligned}$$

Astuce :

$$\begin{aligned} 2^{(n+1)+4} + 3^{3(n+1)+2} &= 2 \times 2^{n+4} + 2 \times 3^{3n+2} - 2 \times 3^{3n+2} + 3^{3n+5} \\ &= 2\left(2^{n+4}3^{3n+2}\right) - 2 \times 3^{3n+2} + 3^3 \times 3^{3n+2} \\ &= 2\left(2^{n+4}3^{3n+2}\right) + \left(-2 + 3^3\right) \times 3^{3n+2} \\ &= 2\left(2^{n+4}3^{3n+2}\right) + 25 \times 3^{3n+2} \end{aligned}$$

25 est divisible par 5 et, d'après l'hypothèse de récurrence $2^{n+4}3^{3n+2}$ est divisible par 5 donc $2^{(n+1)+4} + 3^{3(n+1)+2}$ est divisible par 5.

2.
$$\begin{aligned} 3^{6(n+1)+2} - 2 &= 3^6 \times 3^{6n+2} - 2 \\ &= 3^6 \times (3^{6n+1} - 2) + 3^6 \times 2 - 2 \\ &= 3^6 \times (3^{6n+1} - 2) + 3^6 \times 2 - 2 \\ &= 3^6 \times (3^{6n+1} - 2) + 7 \times 208 \end{aligned}$$

3. Version brève : $(n-1)n(n+1)$ est le produit de trois entiers consécutifs et l'un de ces facteurs est forcément multiple de 3.

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= n^3 - n + 3(n^2 - n) \end{aligned}$$

Or $3(n^2 - n)$ est divisible par 3 et, d'après l'hypothèse de récurrence, $n^3 - n$ est divisible par 3 donc $(n+1)^3 - (n+1)$ est divisible par 3.

4.

$$\begin{aligned}4^{n+1}-1-3(n+1) &= 4\times 4^n-1-3(n+1)\\ &= 4\times(4^n-1-3n)+4+12n-1-3(n+1)\\ &= 4\times(4^n-1-3n)+9n\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}7\times 3^{5(n+1)}+4 &= 7\times 3^5\times 3^{5n}+4\\ &= 3^5\times(7\times 3^{5n}+4)-3^5\times 4+4\\ &= 3^5\times(7\times 3^{5n}+4)-968\\ &= 3^5\times(7\times 3^{5n}+4)-88\times 11\end{aligned}$$

Exercice 2.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_0=0$ et, pour $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+3$. Démontrez, pour tout entier naturel n, que :

$$u_n=5\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right).$$

Correction de l'exercice 2

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+3 \quad (1).$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n=5\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right),$$

donc, en remplaçant u_n dans l'égalité (1) on obtient :

$$u_{n+1}=\frac{2}{5}\left[5\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)\right]+3$$

À ce stade nous avons obtenu une formule explicite de u_{n+1}. Mais la présentation n'est pas tout à fait celle désirée. Modifions-la.

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= 2-5\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n+3\\ &= 5-5\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\\ &= 5\times 1-5\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\\ &= 5\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)\end{aligned}$$

Exercice 3.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 5$ et, pour $n \geqslant 2$: $u_n = 2u_{n-1} - n$.
Démontrez, pour tout entier naturel non nul n, que :

$$u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n.$$

Correction de l'exercice 3

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$u_{n+1} = 2u_n - (n+1) \quad (1).$$

Cette formule de récurrence a été obtenue en remplaçant n pa $n+1$ dans la formule de l'énoncé : pas de difficulté puisque cette formule est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n = 2\left(2^{n-1} + 1\right) + n,$$

donc, en remplaçant u_n dans l'égalité (1) on obtient :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 2\left[\left(2^{n-1} + 1\right) + n\right] - (n+1) \\
&= 2 \times 2 \times 2^{n-1} + 4 + 2n - n - 1 \\
&= 2 \times 2^n + 2 + n \\
&= 2(2^n + 1) + n
\end{aligned}$$

Exercice 4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + n + 1$.
Démontrez, pour tout entier naturel n, que :

$$u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}.$$

Correction de l'exercice 4

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$u_{n+1} = 2u_n + n + 1 \quad (1).$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2},$$

donc, en remplaçant u_n dans l'égalité (1) on obtient :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 3\left[\frac{11}{4}\times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}\right] + n + 1\\
&= \frac{11}{4}\times 3^{n+1} - \frac{9}{4} - \frac{3n}{2} + n + 1\\
&= \frac{11}{4}\times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{6}{4} - \frac{3n}{2} + n + 1\\
&= \frac{11}{4}\times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} - \frac{3n}{2} + \frac{2n}{2} + \frac{2}{2}\\
&= \frac{11}{4}\times 3^{n+1} - \frac{3}{4} + \frac{-3-3n+2n+2}{2}\\
&= \frac{11}{4}\times 3^{n+1} - \frac{3}{4} + \frac{-n-1}{2}\\
&= \frac{11}{4}\times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 5.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = \frac{1}{4} \text{ et } u_{n+1} = 5u_n - 1.$$

1. Calculez les trois premiers termes de la suite (u_n).
2. Conjecturez son expression explicite.
3. Démontrez la.

Correction de l'exercice 5

1. $u_0 = u_1 = u_2 = \frac{1}{4}$.
2. (u_n) semble être constante égale à $\frac{1}{4}$.
3. Démonstration par récurrence.
   Pour l'hérédité :

$$u_{n+1} = 5u_n - 1$$

D'arès l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 5\times\frac{1}{4} - 1\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Exercice 6.

On définit par récurrence la *factorielle* d'un entier naturel n et que l'on note $n!$ de la façon suivante :

$$0! = 1 \text{ et } (n+1)! = (n+1) \times n!.$$

Démontrez que pour tout entier n supérieur ou égale à 1, $n! = 1 \times \cdots \times n$.

Exercice 7.

Montrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = -2$ est croissante.

Exercice 8.

Montrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2020$ est décroissante.

Exercice 9.

Montrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \dfrac{2}{3-u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1,8$ est bornée par 1 et 2 et décroissante.

Exercice 10.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $g(x) = 2x - x^2$.

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{ccc} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & g(u_n) \end{array}\right.$ pour tout entier naturel n.

2. Calculer u_1 et u_2.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et bornée.

Exercice 11.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = 2xe^{-x}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;1]$.

1. Résoudre sur l'intervalle $[0;1]$ l'équation $f(x) = x$.
2. (a) Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;1]$, $f'(x) = 2(1-x)e^{-x}$.

   (b) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.

   (b) En déduire que la suite (u_n) est croissante et bornée.

Exercice 12.

On considère la proposition suivante :

$$\mathscr{P}(n) : \text{ « 9 divise } 10^n + 1 \text{ ».}$$

1. Démontrez, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
2. Qu'en est-il de $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$, $\mathscr{P}(2)$ et $\mathscr{P}(3)$? Que semble-t-il légitime de conjecturer ?
3. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: 9 divise $10^n - 1$.
4. Déduisez-en à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est fausse.

Correction de l'exercice 12

1.
$$\begin{aligned} 10^{n+1} + 1 &= 10 \times (10^n + 1) - 10 + 1 \\ &= 10 \times (10^n + 1) - 9 \end{aligned}$$

2.
$$10^0 + 1 = 2$$
$$10^1 + 1 = 11$$
$$10^2 + 1 = 101$$
$$10^3 + 1 = 1001$$

3.

$$\begin{aligned} 10^{n+1} - 1 &= 10(10^n - 1) + 10 - 1 \\ &= 10(10^n - 1) + 9 \end{aligned}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\mathscr{P}(n)$ est fausse.

   Supposons que $10^n + 1$ est divisible par 9. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $10^n + 1 = 9k$. D'autre part, d'après les questions précédentes $10^n - 1$ es divisible par 9 donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $10^n - 1 = 9p$.
   On en déduit successivement :

$$\begin{aligned} 10^n + 1 - (10^n - 1) &= 9k - 9p \\ 2 &= 9(k - p) \end{aligned}$$

   Donc 2 est divisible par 9 ce qui est absurde car : $0 < 2 < 9$.

   Nous avons démontré par l'absurde que 10^+1 n'est pas divisible par 9, et ce, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13.

Exprimez en fonction de n les sommes données.

a) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(4p-1)$.

b) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}(3p+5)$.

c) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

d) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n+1} 3\times 5^{-n}$.

e) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} p(p+1)$.

f) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n+1}(p-2)^2$.

g) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} 3^{2p+1}$.

h) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} 3\times 2^p - 1$.

Exercice 14.

Exprimez les sommes suivantes à l'aide du symbole Σ, puis calculez-les.

a) $S = 5 + 8 + 11 + 14 + \cdots + 2\,012$.

b) $T = 2^2 + 2^5 + 2^8 + \cdots + 2^{20}$.

c) $R = 1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \cdots + 10^{10}$.

d) $U = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$, pour $x \in \mathbb{R}$.

e) $V = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 15.

Montrez, pour tout entier naturel n, que :

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Correction de l'exercice 15

a) Quelques éléments pour l'hérédité.
$\mathscr{P}(n+1)$ est une égalité, donc de la forme $A = B$. Pour la démontrer nous trans-former l'écriture de A et de B en montrant $A = C$ et $B = C$ pour conclure $A = B$.
D'une part :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= (n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^2 \\
&= (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{6(n^2+2n+1) + (n^2+n)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{6n^2 + 12n + 6 + 2n^3 + n^2 + 2n^2 + n}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}
\end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + 6n^2 + 9n + 4n + 6}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}
\end{aligned}$$

donc, par transitivité,

$$(n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

b) Pour démontrer l'hérédité il faut établir une égalité $A = B$. Nous allons partir de B et en développant astucieusement faire apparaître A.

$$\begin{aligned}\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2 &= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 \\ &= \left[\frac{(n+1)n+(n+1)2}{2}\right]^2 \\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\right]^2\end{aligned}$$

En dévellopant avec une identité remarquable :

$$\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + n(n+1)(n+1) + (n+1)^2$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2 = n(n+1)^2 + 1 \times (n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^3$$

En factorisant :

$$\begin{aligned}\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2 &= (n+1)(n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^3 \\ &= (n+1)^3 + \sum_{i=0}^{n} i^3 \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} i^3\end{aligned}$$

Exercice 16.

Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}b^i.$$

Aide. Pour l'hérédité on utilisera le fait que : $a^{n+1} - b^{n+1} = a \times a^n - b \times b^n$ et $a = (a-b) + b$.

Exercice 17.

Exercice 18.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_1 = u_2 = 1 \text{ et } u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n.$$

Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = (-2)^n - 3 \times (-1)^n.$$

Exercice 19. D

Soit I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.

Montrez que, si la fonction f vérifie la propriété :

$$\mathscr{P} : \text{ « pour tout } x \in I,\ f(x) \in I \text{ »},$$

alors on peut définir sur $\mathbb{N}$ la suite numérique (u_n) de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

De plus, la suite numérique (u_n) vérifie la propriété :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in I.$$

Exercice 20. D

Soient $f : I \to I$ une fonction une fonction croissante, $u_0 \in I$ et (u_n) la suite définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Démontrez que, si $u_0 > u_1$, alors (u_n) est décroissante.

Exercice 21. D

— Baccalauréat S Métropole 12 septembre 2013 Exercice 4