BAC BLANC 2024/04/29

Exercice 1

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (3-(-1))\times(3-(-1)) + (6-2)\times(0-2) + (3-5)\times(9-5) = 0$

Réponse a

2) * a) $2\times 3 + 6 + 3 - 15 = 0$

$2\times 3 + 0 + 9 - 15 = 0$

$2\times 8 + (-3) + (-8) - 15 = -10$

* b) $9\times 3 - 5\times 6 + 3 = 0$

$9\times 3 - 5\times 0 + 3 = 30$

* c) $4\times 3 + 6 + 3 - 21 = 0$

$4\times 3 + 0 + 9 - 21 = 0$

$4\times 8 + (-3) + (-8) - 21 = 0$

Réponse c.

3) ~~* a)~~ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ normal à (ABC).

* a) • $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix}8-(-2)\\-3-17\\-8-12\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix}10\\-20\\-20\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{HD} = 10\vec{n}$ donc

$\overrightarrow{HD}$ est orthogonal à (ABC). • Comme de plus :

$-2 - 2\times 17 - 2\times 12 + 15 \neq 0$, $H \notin (ABC)$.

* b) $3 - 2\times 7 - 2\times 2 + 15 = 0$ donc $H \in (ABC)$.

$\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix}5\\-10\\-10\end{pmatrix} = 5\vec{n}$ donc $\overrightarrow{HD}$ est orthogonal à (ABC).

Réponse b.

4) * $\vec{BC}\begin{pmatrix}0\\-6\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires

donc ni a) ni b).

* $(BC) : \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 - 6s \\ z = 3 + 6s \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3 = 5 + t \\ 6 - 6s = 3 - t \\ 3 + 6s = -1 + 3t \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ s = -\frac{1}{6} \\ 3 + 6 \times \frac{1}{6} = -1 + 3 \times (-2) \end{cases}$$

Δ et (BC) ne sont donc pas sécantes.

Réponse d.

5) * $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ sont normaux respectivement

à (ABC) et $\mathcal{P}$.

Or $\begin{vmatrix}1 & 2\\-2 & -1\end{vmatrix} = 1 \times (-1) - (-2) \times 2 \neq 0$ donc $\vec{n}$ et $\vec{v}$

ne sont pas colinéaires.

Les plans ne sont pas parallèles mais sécants.

* (ABC) contient évidemment les droites (AB), (BC) et (AC).

* $2 \times (-1) - 2 + 2 \times 5 - 6 = 0$ donc $A \in \mathcal{P}$

$2 \times 3 - 6 + 2 \times 3 - 6 = 0$ donc $B \in \mathcal{P}$.

donc $(AB) \subset \mathcal{P}$.

Réponse b.

Exercice 2

1) * $u_0 = 1$ donc $1 \leq u_0 \leq e^2$.

* Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $1 \leq u_k \leq e^2$.

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$\sqrt{1} \leq \sqrt{u_k} \leq \sqrt{e^2}$$

i.e. $1 \leq \sqrt{u_k} \leq e$

Puisque $e > 0$:

$$e \times 1 \leq e \times \sqrt{u_k} \leq e \times e$$

D'après la formule de récurrence définissant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$e \leq u_{k+1} \leq e^2$$

Enfin comme $1 \leq e$: $\quad 1 \leq u_{k+1} \leq e^2$.

* On a démontré par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ 1 \leq u_n \leq e^2}$

2 a) D'après la question précédente $(u_n)_{n\geq 0}$ est à termes strictement positifs.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{e\sqrt{u_n}}{u_n} = \dfrac{e}{\sqrt{u_n}}$.

Or $\sqrt{u_n} \leq e$ (vu dans la question précédente) implique, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{u_n}} \geq \frac{1}{e} \quad \text{et donc, puisque } e>0, \quad \frac{e}{\sqrt{u_n}} \geq 1.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Autrement dit : $\boxed{(u_n)_{n\geq 0} \text{ est croissante.}}$

2 b) $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par e^2 donc

$\boxed{(u_n)_{n\geq 0} \text{ est convergente.}}$

3a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln(e\sqrt{u_n}) - 2 = \ln(e) + \ln(\sqrt{u_n}) - 2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 2 = \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1 = \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2)$$

et donc $\boxed{(v_n)_{n\geq 0} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{2}}$.

3b) $v_0 = \ln(u_0) - 2 = \ln(1) - 2 = -2$.

Or $(v_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}}$$

3c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_n = -\frac{1}{2^{n-1}} \iff \ln(u_n) - 2 = -\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\iff \ln(u_n) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\iff \exp(\ln(u_n)) = \exp\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \exp\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}$

3d) $\lim_{n \to +\infty} 2^{n-1} = +\infty$

En passant à l'inverse : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$.

Par combinaison linéaire : $\lim_{n\to+\infty} 2 - \frac{1}{2^{n-1}} = 2$.

Par composition : $\lim_{n\to+\infty} \exp\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = e^2$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = e^2}$$

4) * $u_1 = e\sqrt{2018} < 2018$ donc

l'affirmation 1 est fausse.

* En reprenant la démonstration faite à la question 1 avec $u_0 = 2$, seule l'initialisation est modifiée et on a bien : $1 \leq 2 \leq e^2$, donc l'affirmation 2 est vraie.

* • Implication directe. Supposons $(u_n)_{n\geq 0}$ constante.

En particulier : $u_1 = u_0 \iff e\sqrt{u_0} = u_0$

$$\iff 0 = u_0 - e\sqrt{u_0}$$

$$\iff 0 = \sqrt{u_0}\,(\sqrt{u_0} - e)$$

$$\iff 0 = \sqrt{u_0} \text{ ou } \sqrt{u_0} = e$$

$$\iff 0 = u_0 \text{ ou } u_0 = e^2$$

• Réciproquement si $u_0 = 0$ alors la suite est clairement constante. Et si $u_0 = e^2$ alors : $u_1 = e\sqrt{e^2} = e^2$ et par une récurrence immédiate $(u_n)_{n\geq 0}$ est constante égale à e^2.

L'affirmation 3 est fausse.

Exercice 3

A 1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\begin{cases} -1 \leq -\cos(x) \leq 1 \\ -1 \leq \sin(x) \leq 1 \end{cases}$

En sommant membre à membre : $-2 \leq -\cos(x) + \sin(x) \leq 2$

En ajoutant 1 : $-1 \leq -\cos(x) + \sin(x) + 1 \leq 3$

Puisque $e^{-x} > 0$: $-e^{-x} \leq e^{-x}\left[-\cos(x) + \sin(x) + 1\right] \leq 3e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, ~~$-e^{x} \leq e^{-x}[-\cos(x)$~~ $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$

A2) $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 3e^{-x} = 0$ donc, par comparaison, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

A 3) $f = uv$ où $u(x) = e^{-x}$ et $v(x) = -\cos(x) + \sin(x) + 1$

u et v étant dérivables sur $\mathbb{R}$, f l'est aussi et : $f' = u'v + uv'$

Or $u'(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = \sin(x) + \cos(x)$ donc, pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -e^{-x}\left[-\cos(x) + \sin(x) + 1\right] + e^{-x}\left[\sin(x) + \cos(x)\right]$

$$= 2e^{-x}\cos(x) - e^{-x}$$

Ainsi : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-x}\left(2\cos(x) - 1\right)}$

A 4 a) Soit $x \in [-\pi ; \pi]$.

- ~~$f'(x) > 0 \iff e^{-x}[\sin(x) +$~~
- $f'(x) > 0 \iff e^{-x}\left[2\cos(x) - 1\right] > 0$

$$\iff 2\cos(x) - 1 > 0 \quad \text{car } e^{-x} > 0$$

$$\iff \cos(x) > \frac{1}{2}$$

$$\iff x \in \left]-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right[.$$

- De même : $f'(x) = 0 \iff x \in \left\{-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right\}$.

A 4 b)

x	$-\pi$		$-\pi/3$		$\pi/3$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$2e^{\pi}$	$\searrow$	α	$\nearrow$	β	$\searrow$	$2e^{\pi}$

où $\alpha = e^{\pi/3}\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\beta = e^{-\pi/3}\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

B 1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) - g(x) = e^{-x}\left(\sin(x) + 1\right)$.

Or $e^{-x} > 0$ et de $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ on déduit :

$0 \leq \sin(x) + 1 \leq 2$ donc : $f(x) - g(x) \geqslant 0$

$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

B 2 a) H est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$H'(x) = \left[\frac{\sin(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2}\right]e^{-x} + \left[-\frac{\cos(x)}{2} - \frac{\sin(x)}{2} - 1\right] \times (-e^{-x})$$

$$H'(x) = 2\,\frac{\sin(x)}{2}\,e^{-x} + e^{-x}$$

Ainsi : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ H'(x) = (\sin(x) + 1)e^{-x}}$

B 2 b) Notons $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine $\mathcal{D}$. Puisque $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$,

$$\mathcal{A} = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(x) - g(x)\,dx$$

$$= \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} (\sin(x) + 1)\,e^{-x}\,dx$$

$$= \left[\left(-\frac{\cos(x)}{2} - \frac{\sin(x)}{2} - 1\right)e^{-x}\right]_{-\pi/2}^{3\pi/2}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 1\right)e^{-3\pi/2} - \left(\frac{1}{2} - 1\right)e^{\pi/2}$$

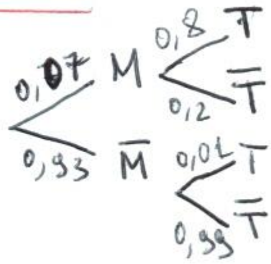
$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} - e^{-3\pi/2}\right)}$$

$\mathcal{A} \approx 2{,}400747$

Finalement l'aire de $\mathcal{D}$ est de 9,6 cm^2

Exercice 4.

1)



$\mathbb{P}(M) \neq 0$, donc d'après la formule des probabilités composées :

$\mathbb{P}(M \cap T) = \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T) = 0{,}07 \times (1 - 0{,}2)$

$\boxed{\mathbb{P}(M \cap T) = 0{,}056}$

2) $\{M, \overline{M}\}$ est un système complet d'événements donc :

$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M \cap T) + \mathbb{P}(\overline{M} \cap T)$

$= \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\overline{M}) \times \mathbb{P}_{\overline{M}}(T)$

$= 0{,}07 \times 0{,}8 + 0{,}93 \times 0{,}01$

$\boxed{\mathbb{P}(T) = 0{,}0653}$

3) Il faut connaître $\mathbb{P}_T(M)$.

4) Par définition : $\mathbb{P}_T(M) = \dfrac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \dfrac{0{,}056}{0{,}0653}$

$\boxed{\mathbb{P}_T(M) \approx 0{,}86}$

5a) * Choisir une personne dans la population est une épreuve de Bernoulli dont le succès est "le test est positif" avec une probabilité $p = 0{,}0653$.

* On répète à l'identique et de façon indépendante la précédente épreuve, $n = 10$ fois. On a donc un schéma de Bernoulli.

* X compte le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(10 ; 0{,}0653)}$

5b) $\mathbb{P}(X=2) = \binom{10}{2} \, 0{,}0653^2 \times (1-0{,}0653)^{10-2}$

$$= \frac{10!}{2!\,(10-2)!} \times 0{,}0653^2 \times (1-0{,}0653)^{10-2}$$

$\mathbb{P}(X=2) \simeq \underline{0{,}11}$

6) Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes ayant un test positif parmi n personnes.

On souhaite : $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$

$$\mathbb{P}(X_n = 0) \leqslant 0{,}01$$

$$\binom{n}{0} 0{,}0653^0 \times (1-0{,}0653)^n \leqslant 0{,}01$$

$$0{,}9347^n \leqslant 0{,}01$$

$\ln(0{,}9347^n) \leqslant \ln(0{,}01)$ car ln est croissante

$$n \ln(0{,}9347) \leqslant \ln(0{,}01)$$

$n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}9347)}$ car $\ln(0{,}9347) < 0$.

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}9347)} \simeq 68{,}19$ en tronquant

donc il faut tester au minimum 69 personnes