DS OIEME 2024/04/12 2 HEURES

12h25 - 12h41 13h19 - 13h42 14h04 - 14h27

Exercice 1 /36

A 1) * $g = \ln \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. 1

De plus : $g' = \frac{f'}{f}$ 1

donc : $f' = g' f$.

$$* \quad f'(t) = -\frac{1}{20} f(t) \left[3 - \ln(f(t))\right]$$

$$\iff g'(t) f(t) = -\frac{1}{20} f(t) \left[3 - g(t)\right] \quad 1$$

$$\iff g'(t) = -\frac{1}{20} \left[3 - g(t)\right]$$ car $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

donc : $f'(t) = -\frac{1}{20} f(t) \left[3 - \ln(f(t))\right] \iff g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}$.

A 2) (H) est de la forme $y' = ay + b$ 1 avec $a = \frac{1}{20}$ 1 et $b = -\frac{3}{20}$ 1 donc les solutions de (H) sont les fonctions

$x \mapsto \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$ 1 i.e. $x \mapsto \lambda e^{x/20} + 3$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

A 3) $g(t) = \lambda e^{t/20} + 3 \iff \ln \circ f(t) = \lambda e^{t/20} + 3$

$\iff f(t) = \exp\left[\lambda e^{t/20} + 3\right]$ 1

$$\exists C \in \mathbb{R}, \ \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(t) = \exp\left[3 + C \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right]$$

A 4a) * Par produit : $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t}{20} = +\infty$.

* Par composition, et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$:

$$\lim_{t \to +\infty} \exp\left(\frac{t}{20}\right) = +\infty \quad 1$$

1

* Par produit et somme :

$$\lim_{t \to +\infty} 3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right) = -\infty$$ (1)

* Par composition : $\lim_{t \to +\infty} \exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right] = 0$ (1)

car $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

A 4 b) La fonction f est supposée dérivable.

$f = e^u$ où $u(t) = 3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)$ (1) ~~u'(t) =~~

donc $f' = u' e^u$. (1)

Comme $u'(t) = -\frac{3}{20}\exp\left(\frac{t}{20}\right)$; (1) pour $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(t) = -\frac{3}{20}\exp\left(\frac{t}{20}\right)\exp\left(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$$ (1)

Ainsi $f' < 0$ puisque $\exp > 0$. (1)

f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. (1)

A 4 c) $f(t) < 0,02 \iff \exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right] < 0,02$ (1)

$\iff 3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right) < \ln(0,02)$ car ln est strictement croissante. (1)

$\iff \exp\left(\frac{t}{20}\right) > -\frac{\ln(0,02) - 3}{3}$ car $-3 < 0$ (1)

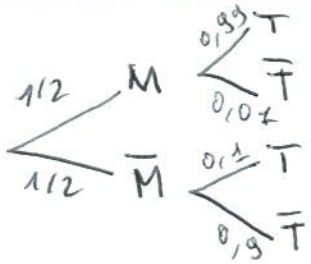
$\iff \frac{t}{20} > \ln\left(\frac{3 - \ln(0,02)}{3}\right)$ car ln est strictement croissante. (1)

$f(t) < 0,02 \iff t \in \left]20\ln\left(\frac{3 - \ln(0,02)}{3}\right) ; +\infty\right[$ (1)

$20\ln\left(\dfrac{3-\ln(0{,}02)}{3}\right) \approx 16{,}6930$ en tronquant à 10^{-4} près ;

donc | la taille sera inférieure à 20 individus au bout de 17 ans. 1

B 1)



| $\mathbb{P}(M) = \frac{1}{2}$ 1, $\mathbb{P}_M(T) = 0{,}99$ 1, $\mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = 0{,}1$. 1

B 2) $\{M, \overline{M}\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales : 1

$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M \cap T) + \mathbb{P}(\overline{M} \cap T)$ 1

$\mathbb{P}(M) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{M}) \neq 0$ donc d'après la formule des probabilités composées : 1

$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\overline{M}) \times \mathbb{P}_{\overline{M}}(T)$ 1

$= \frac{1}{2} \times 0{,}99 + \frac{1}{2} \times 0{,}1$ 1

| $\mathbb{P}(T) = 0{,}545$ 1

B 3) $\mathbb{P}_T(M) = \dfrac{\mathbb{P}(T \cap M)}{\mathbb{P}(T)}$ 1 d'après la définition.

$= \dfrac{\frac{1}{2} \times 0{,}99}{0{,}545}$ 1

$\approx 0{,}90825$ 1 en tronquant à 10^{-5} près.

$\mathbb{P}_T(M) < 0{,}999$ donc

| ce test n'est pas fiable. 1

Exercice 2 /29

A 1) * Par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} x+k = -\infty$. 1

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty \end{cases}$ donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$. 1

Enfin par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = -\infty.}$ 1

* $f_k(x) = x e^{-x} - k e^{-x} = \dfrac{x}{e^x} - \dfrac{k}{e^x}$

Par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$. 1

Par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{k}{e^x} = 0$. 1

Enfin par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = 0.}$ 1

A 2) Soit $k \in \mathbb{R}$.

$f_k = uv$ avec $u(x) = x+k$ et $v(x) = e^{-x}$. 1

u et v étant dérivables sur $\mathbb{R}$, f_k est dérivable 1 sur $\mathbb{R}$ et $f_k' = u'v + uv'$. 1

Or $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$ 1 donc, pour $x \in \mathbb{R}$:

$f_k'(x) = e^{-x} - (x+k)e^{-x} = e^{-x}(1-x-k)$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_k'(x) = e^{-x}(-x+1-k).}$ 1

A 3) $f_k'(x)$ est du signe de $-x+1-k$ or :

$-x+1-k > 0 \iff 1-k > x$ 1 donc

x	$-\infty$		$1-k$		$+\infty$	
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$		1
f_k	$-\infty$	$\nearrow$	$f_k(1-k)$	$\searrow$	0	1

1

$$f_k(1-k) = e^{k-1}$$

B 1 a)

$$I_0 = \int_{-2}^{0} e^{-x}\,dx$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_{-2}^{0} \quad 1$$

$$= -1-(-e^2)$$

$$\boxed{I_0 = e^2-1} \quad 1$$

B 1 b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$I_{n+1} = \int_{-2}^{0} x^{n+1} e^{-x}\,dx$$

Notons $u(x) = x^{n+1}$ et $v'(x) = e^{-x}$ 1

alors $u'(x) = (n+1)x^n$ et $v(x) = -e^{-x}$. 1

u et v sont dérivables et à dérivées continues donc, en intégrant par parties : 1

$$I_{n+1} = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx \quad 1$$

$$= \left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} (n+1)x^n(-e^{-x})\,dx$$

$$= +(-2)^{n+1}e^2 + (n+1)\int_{-2}^{0} x^n e^{-x}\,dx \quad 1$$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (-2)^{n+1}e^2 + (n+1)I_n}$

B 1 c) * $I_1 = (-2)^1 e^2 + 1 \times I_0$

$$\boxed{I_1 = -1-e^2} \quad 1$$

$* \; I_2 = (-2)^2 e^2 + 2 I_1$

$= 4e^2 + 2(-1-e^2)$

$\boxed{I_2 = 2e^2 - 2}$ 1

B 2 a) D'après le graphique :

$f_k(0) = 2$ 1

$\Leftrightarrow (0+k)e^{-0} = 2$

$\Leftrightarrow \boxed{k = 2}$ 1

B 2 b) $\mathcal{S} = \int_{-2}^{0} f_2(x)\,dx$ 1

$= \int_{-2}^{0} (x+2)e^{-x}\,dx$

Par linéarité : 1

$\mathcal{S} = \int_{-2}^{0} x^1 e^{-x}\,dx + 2\int_{-2}^{0} x^0 e^{-x}\,dx$

$= I_1 + 2I_0$

$\mathcal{S} = -1 - e^2 + 2(e^2 - 1)$ 1

$\boxed{\mathcal{S} = e^2 - 3}$