Devoir 0ieme 2024/04/12 2 heures.

Exercice 1.

Les parties A et B sont indépendantes.

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.

Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad y' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln y).$$

1. *Question non notée.*
   Démontrer l'équivalence suivante : une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)[3 - \ln(f(t))]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$.
2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :
$$\text{(H)} \qquad z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}.$$
3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$,
$$f(t) = \exp\left[3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$
4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :
$$f(t) = \exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$

(a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

(b) Déterminer le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.

(c) Résoudre dans $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0,02$.
Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Partie B.

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50 % d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas ».

On note M l'évènement « l'animal est malade », $\overline{M}$ l'évènement contraire et T l'évènement « le test est positif ».

1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$.
2. En déduire $P(T)$.
3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à $0,999$. Ce test est-il fiable ?

Exercice 2.

Partie A.

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x+k)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x.
3. En déduire le tableau de variations de f_k.

Partie B.

1. On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par $\mathrm{I}_0 = \int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par : $I_n = \int_{-2}^{0} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

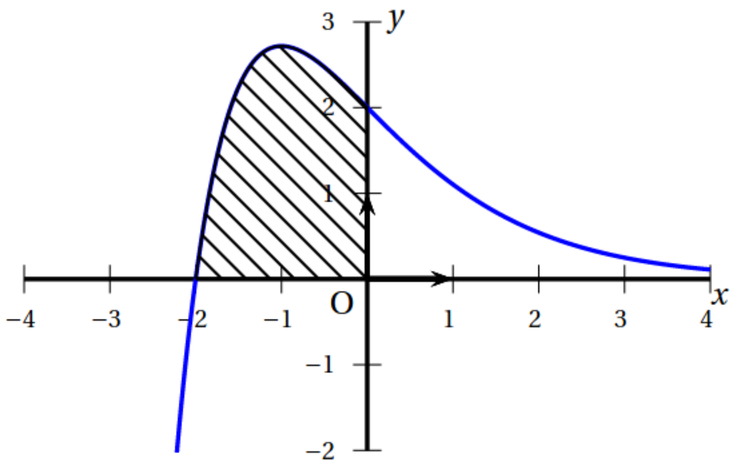
   (a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale I_0.

   (b) En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :

   $$I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n.$$

   (c) En déduire les valeurs exactes des intégrales I_1 et I_2.

2. Le graphique ci-dessous représente une courbe $\mathcal{C}_k$ qui est la représentation graphique d'une fonction f_k définie à la partie A.



   (a) À l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel k correspondant.

   (b) Soit $\mathcal{S}$ l'aire de la partie hachurée (en unité d'aire) ; exprimer $\mathcal{S}$ en fonction de I_1 et I_0 et en déduire sa valeur exacte.