Éléments de correction.



## Exercice 1 18

1) $A \in d_1 \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} 2 = 2+t \\ 3 = 3-t \\ 0 = t \end{cases}$ 1 Clairement $t=0$ convient. 1 $\boxed{A \in d_1}$

2) $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 1 et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ 1 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix} = 1\times 1 - (-1)\times 2 = 3 \neq 0$ donc

1 $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires, et donc, $\boxed{d_1 \nparallel d_2}$ 1

Ou juste dire : non coplanaires.

3) $\vec{v}\cdot\vec{u_1} = 1\times 1 + (-2)\times(-1) + (-3)\times 1 = 0$ 1

$\vec{v}\cdot\vec{u_2} = 1\times 2 + (-2)\times 1 + (-3)\times 0 = 0$ 1

donc $\boxed{\vec{v} \text{ est orthogonal à } \vec{u_1} \text{ et } \vec{u_2}}$.

4) a) Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}$ 1 Montrons que $\vec{n}$ est normal 1 à P. $\vec{n}\cdot\vec{u_1} = \vec{n}\cdot\vec{v} = 0$ et $(\vec{u_1}, \vec{v})$ est une base de P puisqu'ils sont orthogonaux, donc, $\vec{n}$ est normal à P.

Il existe une équation cartésienne de P ~~telle~~ de la forme :

$5x + 4y - z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$. 1

Or $A \in P \iff 5\times 2 + 4\times 3 - 0 + d = 0 \iff d = -22$, 1

donc : $\boxed{P : 5x + 4y - z - 22 = 0}$

4) b) * $\begin{cases} 3 = -5 + 2\times 4 \\ 3 = -1 + 4 \\ 5 = 5 \end{cases}$ donc $B \in d_2$. 1

* $5\times 3 + 4\times 3 - 5 - 22 = 0$ donc $B \in P$. 1

* $A \in P$ et P dirigé par $\vec{u_1}$ donc $d_1 \subset P$. Or $d_1$ et $d_2$ ne sont pas coplanaires donc $d_2 \not\subset P$. 1

On en déduit que : $\boxed{d_2 \cap P = \{B\}}$.

5) a) $\Delta : \begin{cases} x = t + 3 \\ y = -2t + 3 \\ z = -3t + 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. 1

5) b) $\begin{cases} 2 + t = t' + 3 \\ 3 - t = -2t' + 3 \\ t = -3t' + 5 \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' + 1 \\ t = 2t' \\ t = -3t' + 5 \end{cases} \iff \begin{cases} t' = 1 \\ t = 2t' \\ t = -3t' + 5 \end{cases} \iff \begin{cases} t' = 1 \\ t = 2 \end{cases}$ 1

$\boxed{d_1 \text{ et } \Delta \text{ sont sécantes au point de coordonnées } (4;1;2)}$

5) c) D'après 3) $\Delta$ est orthogonale à $d_1$ et $d_2$.

D'après 4)b) $B \in d_2$ et, par construction, $B \in \Delta$. 1

D'après 5) b), $d_1$ et $\Delta$ sont sécantes. $\boxed{\Delta \text{ répond au problème}}$. 1

## Exercice 2

31

**A-1)** • $\lim\limits_{x \to 0} -x = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x \to 0} e^{-x} = 1$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$

• En sommant : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{-x} + \ln(x) = -\infty}$

**A-2)** Soit $x \in ]0;1]$. $f'(x) = -e^{-x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-x e^{-x} + 1}{x}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1 - x e^{-x}}{x}}$$

**A-3)** * Soit $x \in ]0;1]$. $0 < x \leq 1$ ①

donc : $0 > -x \geq -1$ epuis, exp étant strictement croissante :

$e^0 > e^{-x} \geq e^{-1}$, d'où : $0 < e^{-x} < 1$. ②

Les termes dans ① et ② étant tous positifs on peut multiplier membre à membre : $0 < x e^{-x} < 1$.

$\boxed{\forall x \in ]0;1],\ x e^{-x} < 1}$

* On en déduit que : $f'(x) > 0$ pour tout $x \in ]0;1]$ et donc

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ |
| $f$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ $e^{-1}$ |

**A-4)** • $f$ est continue et strictement croissante sur $]0;1]$ donc $f$ réalise une bijection de $]0;1]$ sur $\left]\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) ; f(1)\right]$ $= ]-\infty ; e^{-1}]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

• $0 \in ]-\infty ; e^{-1}]$ donc, $f$, étant bijective :

$\boxed{\text{il existe un unique } \ell \in ]0;1] \text{ tel que } f(\ell) = 0.}$



2

B_1) a) $a_1 = e^{-b_0} = e^{-1}$ $\quad b_1 = e^{-a_0} = e^{-1/10}$

$a_1 \approx 0{,}36$ ou $a_1 \approx 0{,}37$
$b_1 \approx 0{,}90$ ou $b_1 \approx 0{,}91$

B_1) b)

```
def termes(n):
    a = 1/10
    b = 1
    for k in range(0, n):
        c = exp(-b)
        b = exp(-a)
        a = c
    return (a, b).
```

B_2) a) * Clairement : $0 < a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0 \leq 1$ avec les valeurs approchées.

* Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons : $0 < a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k \leq 1$.

Puisque $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ :

$$e^{-0} > e^{-a_k} \geq e^{-a_{k+1}} \geq e^{-b_{k+1}} \geq e^{-b_k} \geq e^{-1}$$

$$1 > b_{k+1} \geq b_{k+2} \geq a_{k+2} \geq a_{k+1} \geq e^{-1}$$

D'où : $0 < a_{k+1} \leq a_{k+2} \leq b_{k+2} \leq b_{k+1} \leq 1$.

* On a démontré par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$

B_2) b) * D'après la question précédente $(a_n)$ est croissante et majorée par 1 donc : $(a_n)$ est convergente.

* D'après la question précédente $(b_n)$ est décroissante et minorée par 0 donc : $(b_n)$ est convergente.

B_3) a) $f(A) = e^{-A} + \ln(A) = B + \ln(e^{-B}) = B - B$ donc $f(A) = 0$

B_3) b) $f(B) = 0$ donc $A = B = \ell$ d'après A4) d'où $A - B = 0$.



3