$$x^2 + y^2 = z^2$$

Devoir surveillé n° 2 — $\frac{17}{20}$ — 09/02/2024

Mathématiques

Ex 1 : $\frac{16}{18} \approx \frac{7{,}25}{8}$. Ex 2 : $\frac{25}{31} \approx \frac{9{,}75}{12}$

Une super copie.

Exercice 1 :

1.) $A \in (d_1) \iff \begin{cases} x_A = 2 + t \\ y_A = 3 - t \\ z_A = t \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = 2 + t \\ 3 = 3 - t \\ 0 = t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$

1

1 Donc : $\boxed{A \in (d_1)}$

1 1 2.) $\vec{v_1}(1 ; -1 ; 1)$ est directeur de (d_1) et $\vec{v_2}(2 ; 1 ; 0)$ est directeur de (d_2).

1 (d_1) et (d_2) sont non coplanaires donc elles ne sont pas parallèles. De plus leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, donc :

1 $\boxed{(d_1) \not\parallel (d_2)}$

3.) $\vec{v} \perp \vec{v_1} \iff \vec{v} \cdot \vec{v_1} = 0 \iff 1 \times 1 - 2 \times (-1) - 3 \times 1 = 0$

1 $\vec{v} \perp \vec{v_2} \iff \vec{v} \cdot \vec{v_2} = 0 \iff 1 \times 2 - 2 \times 1 - 3 \times 0 = 0$

1 Donc $\vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$

4.) (a) Soit $\vec{n}$ normal à P

On désigne $\vec{n}$ par $(a ; b ; c)$

$\vec{n}$ est normal à P si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{v_1}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{n} \cdot \vec{v_1} = a \times 1 + b \times (-1) + c \times 1 = 0 \iff a - b + c = 0$$
$$\vec{n} \cdot \vec{v} = a \times 1 + b \times (-2) + c \times (-3) = 0 \iff a - 2b - 3c = 0$$

$$\iff \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a - 2b - 3c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a - b + c = 0 \\ -b - 4c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a - b + c = 0 \\ b = -4c \end{cases} \text{, on choisit } c = -1$$

$$\iff \begin{cases} a - (4) + 1 = 0 \\ b = -4 \end{cases}$$

On a donc $\vec{n}(5 ; -4 ; 1)$, et P admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$P : 5x + 4y - z + d = 0$$

4

Or $A \in P$, donc ses coordonnées vérifient l'équation

$$5x_A + 4y_A - z_A + d = 0$$
$$\iff 5 \times 2 + 4 \times 3 - 0 + d = 0$$
$$\iff d = -22$$

Donc :

$$\boxed{P : 5x + 4y - z - 22 = 0}$$

$x^2 + y^2 = z^2$

Devoir surveillé n°2

09/02/2026

Mathématiques

Exercice 1 : Suite

4.) (b) Soit $M(-5+2t' ; -1+t' ; 5) \in (d_2)$

$$M \in P \iff 5(-5+2t') + 4(-1+t') - 5 - 22 = 0$$
$$\iff -25 + 10t' - 4 + 4t' - 27 = 0$$
$$\iff 14t - 56 = 0$$
$$\iff t = \frac{56}{14}$$

3

Le point d'intersection entre d_2 et P est :

$$(d_2) : \begin{cases} x = -5 + 2 \times \frac{56}{14} = 3 \\ y = -1 + \frac{56}{14} = 3 \\ z = 5 \end{cases}$$

Donc <u>la droite (d_2) coupe le plan P au point $B(3 ; 3 ; 5)$</u>

5.) La droite Δ est dirigée par $\vec{v}$ et B appartient à la droite donc :

1

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 3 + t'' \\ y = 3 - 2t'' \\ z = 5 - 3t'' \end{cases}$$

(b.) Le point B appartient au plan P et P est dirigé par $\vec{u}_1$ directeur de d_1. De plus, $\vec{v} \perp \vec{u}_1$ donc Δ et d_1 sont sécantes.

0

0

(b.) La droite Δ est sécantes à d_1 et d_2 car d_2 et Δ sont coplanaires et $\vec{v_2} \perp \vec{v}$. Donc Δ est à la fois sécante et orthogonal à d_1 et d_2.

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Devoir surveillé n°2 — Mathématiques

09/02/2024

Exercice 2 : Partie A :

1 1.) $\lim\limits_{x \to 0} e^{-x} = e^{0} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc par

1 somme $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

2.) $f = u + v$ avec $u(x) = e^{-x}$ et $v(x) = \ln(x)$

f est dérivable sur $]0;1[$.

$f' = u' + v'$ avec $u'(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

Soit $x \in]0;1[$:

1 $$f'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{x} = \frac{-xe^{-x}}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1 - xe^{-x}}{x}.$$

Donc :

$$\underline{f'(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}}$$

3.) $1 - xe^{-x} > 0 \iff -xe^{-x} > -1$

$\iff xe^{-x} < 1$

1 Donc $\forall x \in]0;1[$, $f'(x) > 0$ et $f(x)$ est croissante sur $]0;1[$. On en déduit le tableau de variation :

x	0		1
1 f'	||	$+$	
1 var de $f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$f(1)$

$f(1) = e^{-1} + \ln(1) \approx 0{,}37$

(1) 4.) * f est dérivable donc continue

(1) * f est strictement croissante sur $]0;1]$ et à valeurs

(1) dans $]-\infty; f(1)]$. $0 \in]-\infty; f(1)]$

(1) D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel l tel que $f(l)=0$

Exercice 2 : Partie B.

(1) 1.) (a). $a_1 = e^{-b_0} \simeq 0,37$ à 10^{-2} près

(1) $b_1 = e^{-a_0} \simeq 0,90$ à 10^{-2} près

(b.)

```
def termes(n):
    a = 1/10
    b = 1
    for k in range(0,n):
        c = e**(-a)
        b = e**(-b)
        a = c
    return(a,b)
```

(1)

(1)

2.) (a) prochaine page

$x^2 + y^2 = z^2$

09/02/2024

Devoir surveillé n° 2
Mathématiques

Exercice 2 : Partie B : Suite

2. (a). Notons P(n) " $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$. "

Démontrons par récurrence que P(n) : est vraie, pour tout entier naturel n.

*** Initialisation**

$a_0 = 0,1$; $b_0 = 1$

$a_1 \approx 0,37$; $b_1 = 0,9$

On a $0 < \cancel{0,1}\, a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0 \leqslant 1$

1

Donc P(0) est vraie

*** Hérédité :**

1

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que P(n) est vraie et montrons que P(n+1) l'est aussi. D'après l'hypothèse de récurrence :

1

$$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$$

non

$\Leftrightarrow -\exp(0) \geqslant -\exp(a_n) \geqslant -\exp(a_{n+1}) \geqslant -\exp(b_{n+1}) \geqslant -\exp(b_n) \geqslant -\exp(1)$, car e^{-x} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

1

$\cancel{\Leftrightarrow}\ 1 > b_{n+1} \geqslant b_{n+2} \geqslant a_{n+2} \geqslant a_{n+1} \geqslant 0,36 > 0$

$\Leftrightarrow 0 < a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1} < 1$.

1

Donc P(n+1) est vraie

* Conclusion

On a montré :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

(b). La suite (a_n) est croissante car $a_n \leq a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et elle majorée par 1, donc d'après le théorème de la limite monotone elle converge.

(1)

De même, b_n est decroissante car $b_{n+1} \leq b_n$ et elle est minorée par λ ? donc elle converge.

(1)

3.) (a). $f(A) = 0 \iff e^{-A} + \ln(A) = 0$, or $A = e^{-B}$ donc $\ln(\underbrace{A}_{e^{-B}}) = -B$ donc :

$$f(A) = B - B = 0$$

(1)

(b.) $f(B) = e^{-B} + \ln(B)$
$= A + \ln(e^{-A})$
$= A - A$
$= 0$

(1)

On a $f(A) = f(B) = 0$, or d'après la question 4 il existe une unique réel l tel que $f(l) = 0$. On en déduit $A = B = l$. Donc :

(1)

$$A - B = 0$$

(1)