Devoir surveillé terminale du 2024/02/10.

Exercice 1. 2017, 13 juin, centres étrangers. 8 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$.

On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t \\ y &=& 3-t \\ z &=& t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -5+2t' \\ y &=& -1+t' \\ z &=& 5 \end{array}\right. ,t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.

Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1. Vérifier que le point A$(2\,;\,3\,;\,0)$ appartient à la droite d_1.
2. Donner un vecteur directeur $\vec{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\vec{u_2}$ de la droite d_2.

   Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?
3. Vérifier que le vecteur $\vec{v}(1\ ;\ -2\ ;\ -3)$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$. ‘
4. Soit P le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{v}$.

   On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P.
   (a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $5x+4y-z-22=0$.
   (b) Montrer que la droite d_2 coupe le plan P au point B $(3\,;\,3\,;\,5)$.
5. On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$, et passant par le point B $(3\,;\,3\,;\,5)$.
   (a) Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.
   (b) Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.
   (c) Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

Exercice 2.2022, 19 mai, centres étrangers. 12 points

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x de $]0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \ln(x).$$

1. Calculer la limite de f en 0.
2. On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,1]$. On note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,1]$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - x\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

3. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,1]$, on a $x\mathrm{e}^{-x} < 1$.
   En déduire le tableau de variation de f sur $]0\,;\,1]$.
4. Démontrer qu'il existe un unique réel ℓ appartenant à $]0\,;\,1]$ tel que $f(\ell) = 0$.

Partie B

1. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0 & = & \dfrac{1}{10} \\ b_0 & = & 1 \end{cases} \text{ et, pour tout entier naturel } n, \begin{cases} a_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-a_n} \end{cases}$$

   (a) Calculer a_1 et b_1. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.

   (b) On considère ci-dessous la fonction `termes`, écrite en langage Python.

```
def termes (n) :
  a=1/10
  b=1
  for k in range(0,n) :
    c= ...
    b = ...
    a = c
  return(a,b)
```

   Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction termes calcule les termes des suites (a_n) et (b_n).

2. On rappelle que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$$

   (b) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

3. On note A la limite de (a_n) et B la limite de (b_n).
   On admet que A et B appartiennent à l'intervalle $]0\,;\,1]$, et que $A = \mathrm{e}^{-B}$ et $B = \mathrm{e}^{-A}$.

   (a) Démontrer que $f(A) = 0$.

   (b) Déterminer $A - B$.