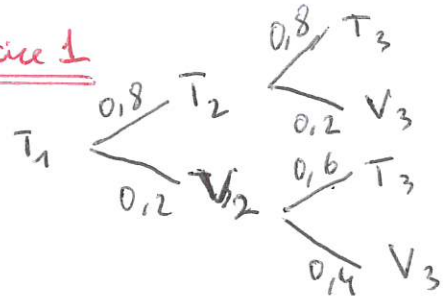
Exercice 1

1)



2) $\{T_2, V_2\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales,

$p_3 = \mathbb{P}(T_3) = \mathbb{P}(T_3 \cap T_2) + \mathbb{P}(T_3 \cap V_2)$.

D'après la formule des probabilités composées, puisque $\mathbb{P}(T_2) \neq 0$ et $\mathbb{P}(V_2) \neq 0$:

$$p_3 = \mathbb{P}(T_2) \times \mathbb{P}_{T_2}(T_3) + \mathbb{P}(V_2) \times \mathbb{P}_{V_2}(T_3) = 0,8 \times 0,8 + 0,2 \times 0,6.$$

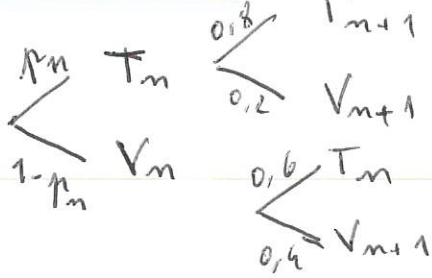
$$\boxed{p_3 = 0,76.}$$

3) $$\mathbb{P}_{V_3}(T_2) = \frac{\mathbb{P}(T_2 \cap V_3)}{\mathbb{P}(V_3)} = \frac{\mathbb{P}(T_2) \times \mathbb{P}_{T_2}(V_3)}{\mathbb{P}(V_3 \cap T_2) + \mathbb{P}(V_3 \cap T_3)}$$

$$= \frac{0,8 \times 0,2}{\mathbb{P}(T_2) \times \mathbb{P}_{T_2}(V_3) + \mathbb{P}(V_2) \times \mathbb{P}_{V_2}(V_3)} = \frac{0,16}{0,8 \times 0,2 + 0,2 \times 0,4}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{V_3}(T_2) = \frac{2}{3}}$$

4)



5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\{T_n, V_n\}$ est un système complet d'événement donc :

$p_{n+1} = \mathbb{P}(T_{n+1}) = \mathbb{P}(T_{n+1} \cap T_n) + \mathbb{P}(T_{n+1} \cap V_n) = \mathbb{P}(T_n) \times \mathbb{P}_{T_n}(T_{n+1})$
$+ \mathbb{P}(V_n) \times \mathbb{P}_{V_n}(T_{n+1}) = p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6 = 0,8 p_n - 0,6 p_n$
$+ 0,6$, donc : $\boxed{p_{n+1} = 0,2 p_n + 0,6 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

6.) * $p_1 = 1$ et $0,75 + 0,25 \times 0,2^{1-1} = 1$ donc l'égalité est vraie pour $n = 1$.

* Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que : $p_k = 0,75 + 0,25^{k-1}$.

D'après 5) : $p_{k+1} = 0,2\,p_k + 0,6$.

D'après l'hypothèse de récurrence : $\cancel{p_{k+1} = 0,2(0,75 + 0,25^{k+1}}) + 0,6$

$= \cancel{0,2 \times 0,75} +$

$p_{k+1} = 0,2\left(0,75 + 0,25 \times 0,2^{k}\right) + 0,6$

$= 0,2 \times 0,75 + 0,2 \times 0,25 \times 0,2^{k} + 0,6$

$= 0,15 + 0,25 \times 0,2^{k+1} + 0,6$

$p_{k+1} = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{k+1}$

L'égalité est vraie au rang $k+1$.

* On a démontré par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \; p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n}}$

7) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,2^{n} = 0$ donc par produit puis somme

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n} = 0,75$.

Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,75}$

Plus le nombre de jours d'utilisation de la méthode augmente plus la probabilité d'utiliser les transports en commun s'approche de 0,75.

Exercice 2

1) a) Puisqu'on utilise 2g, par proportionnalité :

$v_0 = 2 \times 3 \times 10^{21}$

$\boxed{v_0 = 6 \times 10^{21}}$

1) b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Le $n+1$-ième jour 0,5% des noyaux se sont désintégrés par rapport au n-ième jour, or $1 - \frac{0,5}{100} = 0,995$, donc :

$v_{n+1} = 0,995\, v_n + 0,005 \times 3 \times 10^{21}$ en ajoutant

les 0,005 g.

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 0,995 v_n + 1,5 \times 10^{19}}$

2) a) * $v_0 = 6 \times 10^{21}$ et $v_1 = 0,995 \times 6 \times 10^{21} + 1,5 \times 10^{19} = 5,985 \times 10^{21}$

donc $0 \leq v_1 \leq v_0$

* Soit $k \in \mathbb{N}$.

Supposons que : $0 \leq v_{k+1} \leq v_k$.

~~D'après 1) b).~~ $h : x \mapsto 0,995\, x + 1,5 \times 10^{19}$ est affine de coefficient directeur strictement positif donc strictement croissante, En partant de l'hypothèse de récurrence :

$$h(0) \leq h(v_{k+1}) \leq h(v_k)$$

$$1,5 \times 10^{19} \leq v_{k+2} \leq v_{k+1}$$

donc : $0 \leq v_{k+2} \leq v_{k+1}$

L'encadrement reste vrai au rang $k+1$.

* On a démontré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v_{n+1} \leq v_n}$$

2) b) D'après 2) a) (v_n) est décroissante et minorée par 0

donc : $\boxed{(v_n) \text{ converge}}$.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= v_{n+1} - 3 \times 10^{21} \\ &= 0,995 v_n + 1,5 \times 10^{19} - 3 \times 10^{21} \\ &= 0,995\, v_n - 2,985 \times 10^{21} \\ &= 0,995\,(v_n - 3 \times 10^{21}) \end{aligned}$$

donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } 0,995}$.

3

3) b) D'après la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 0{,}995^n \times u_0 = 0{,}995^n \times (6\times10^{21} - 3\times10^{21})$$

$$= 0{,}995^n \times 3\times10^{21}$$

Or $u_n = v_n - 3\times10^{21}$ donc :

$$v_n = 3\times10^{21} + 0{,}995^n \times 3\times10^{21}$$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = 3\times10^{21}(0{,}995^n + 1)}$.

3) c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}995^n = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3\times10^{21}}$.

En appliquant toujours le même rajout de polonium le nombre total de noyaux se rapproche de 3×10^{21}.

4) $\cancel{v_n} \cancel{\leq}\ 4{,}5\times10^{21} \iff 3\times10^{21}\times(0{,}995^n+1) \leq 4{,}5\times10^{21}$

$\iff 0{,}995^n \leq \dfrac{4{,}5}{3} - 1$ car $3\times10^{21} > 0$

$\iff \ln(0{,}995^n) \leq \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ car ln est croissante

$\iff n\ln(0{,}995) \leq \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(0{,}995)}$ car $\ln(0{,}995) < 0$.

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(0{,}995)} \approx \cancel{-1}38{,}29$ donc

il faudra attendre 139 jours.

5) a)

V= 0.995 *L[k] + 1.5 x 10 ** 19

ou V= 3 * 10^21 (0.995 ** k + 1)

5) b) $n = 52$

Exercice 3. 1) c 2) a 3) c 4) b 5) c.

Exercice 4

A 1) * f est un produit de fonctions dérivables donc est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -x e^{-x}$
Donc $f'(x)$ est du signe de $-x$.

* $f(x) = x e^{-x} + e^{-x} = \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}$

Par croissance comparée : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.

Par passage à l'inverse : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

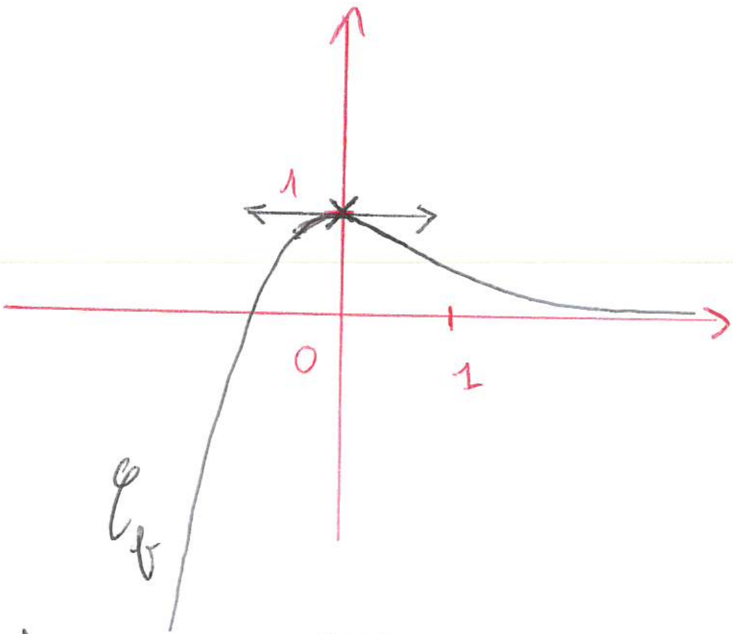
D'où, par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

* Par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) e^{-x} = -\infty$.

* On déduit de ce qui précède le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

A 2)



B 1) a) $f_0 = (x+1)e^{0 \times x} = x+1$ est une fonction affine.

B 1) b) Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$

sont solution de : $f_0(x) = f_1(x) \iff x+1 = (x+1)e^x$

$\iff (x+1)[1-e^x] = 0 \iff x=-1$ ou $x=0$.

Les points d'intersection de $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ ont pour coordonnées : $(0;1)$ et $(-1;0)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$f_k(-1) = (-1+1)e^{k\times(-1)} = 0 \times e^{-k} = 0$,

$f_k(0) = (0+1)\times e^{k\times 0} = 1 \times 1 = 1$,

donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, les points de coordonnées $(0;1)$ et $(-1;0)$ appartiennent à $\mathcal{C}_k$.

A 2)

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	$-$	0 $+$		$+$
e^x-1	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)(e^x-1)$	$+$	0 $-$	0	$+$

Soit $k \in \mathbb{N}$. $f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x+1)\left[e^{(k+1)x} - e^{kx}\right]$

$= (x+1)e^{kx}\left[e^x - 1\right]$

$e^{kx} > 0$ pour tout $x > 0$; donc $f_{k+1}(x) - f_k(x)$ est du signe de $(x+1)(e^x-1)$, et donc :

$\mathcal{C}_{k+1}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_k$ sur $]-\infty;-1]$ et sur $[0;+\infty[$, et au-dessous sur $[-1;0]$.

A 3) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$f_k'(x) = e^{kx} + k(x+1)e^{kx}$

$= e^{kx}[1 + k(x+1)]$

$= e^{kx}(kx + k+1)$

$e^{kx} > 0$ et $kx + k+1 > 0 \iff x > -1 - \frac{1}{k}$ si $k > 0$

et $kx+k+1 \geq 0 \iff x \cancel{\geq} -1-\frac{1}{k}$ si $k<0$.

* Cas $k < 0$. Alors l'étude est semblable à celle de la partie A :

x	$-\infty$		$-1-\frac{1}{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
f_k	$-\infty$	$\nearrow$	$f_k\left(-1-\frac{1}{k}\right)$	$\searrow$	0

* Cas $k > 0$. Idem

x	$-\infty$		$-1-\frac{1}{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
f_k	0	$\searrow$	$f_k\left(-1-\frac{1}{k}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) D'après les tableaux de variations, -1 correspond à $\mathcal{E}$ d'après la partie A et donc $\mathcal{F}$ correspond à -3.

1 et 2 peuvent convenir pour $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$

Or $-1-\frac{1}{1} = -2$ et $-1-\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

donc $\mathcal{H}$ correspond à 2 et $\mathcal{K}$ à 1.