Bac blanc rattrapage 2024/02/03.

4 heures. Calculatrice autorisée en mode examen.

Exercice 1. 5 points

Dans un souci de préservation de l'environnement, Monsieur Durand décide de se rendre chaque matin au travail en utilisant son vélo ou les transports en commun.

S'il choisit de prendre les transports en commun un matin, il reprend les transports en commun le lendemain avec une probabilité égale à 0,8.

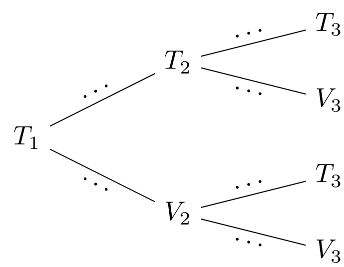
S'il utilise son vélo un matin, il reprend son vélo le lendemain avec une probabilité égale à 0,4.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

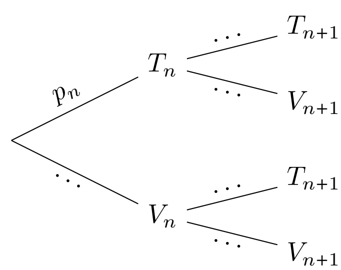
— T_n l'évènement « Monsieur Durand utilise les transports en commun le n-ième jour »
— V_n l'évènement « Monsieur Durand utilise son vélo le n-ième jour »
— On note p_n la probabilité de l'évènement T_n,

Le premier matin, il décide d'utiliser les transports en commun. Ainsi, la probabilité de l'évènement T_1 est $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les 2ᵉ et 3ᵉ jours,



2. Calculer p_3
3. Le 3ᵉ jour, M. Durand utilise son vélo.
   Calculer la probabilité qu'il ait pris les transports en commun la veille.
4. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième jours.



5. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$.
6. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}.$$

7. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2. 4 points

Marie Sklodowska-Curie (1867 – 1934) est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne), polonaise naturalisée française.
Deux Prix Nobel lui ont été décernés : un en Physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en 1903 et un en Chimie en 1911 pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.

Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.

On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.

On admet que, au bout de 24 heures, $0,5\,\%$ des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors $0,005$ g de polonium.

On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.

Pour $n \geqslant 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

1. (a) Vérifier que $v_0 = 6 \times 10^{21}$.

   (b) Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$v_{n+1} = 0,995 v_n + 1,5 \times 10^{19}.$$

2. (a) Démontrer, par récurrence sur n, que $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.

   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = v_n - 3 \times 10^{21}.$$

   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $0,995$.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n = 3 \times 10^{21}\left(0,995^n + 1\right)$.

   (c) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de jours le nombre de noyaux de polonium sera inférieur à $4,5\times 10^{21}$. Justifier la réponse.

5. On souhaite disposer de la liste des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Pour cela, on utilise une fonction appelée noyaux programmée en langage Python et retranscrite partiellement ci-après.

```
1  def noyaux (n) :
2      V =6*10**21
3      L=[V]
4      for k in range (n) :
5          V= ...
6          L.append(V)
7      return L
```

   (a) À la lecture des questions précédentes, proposer deux solutions différentes pour compléter la ligne 5 de la fonction noyaux afin qu'elle réponde au problème.

   (b) Pour quelle valeur de l'entier n la commande noyaux(n) renverra-t-elle les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon de polonium pendant 52 semaines d'étude ?

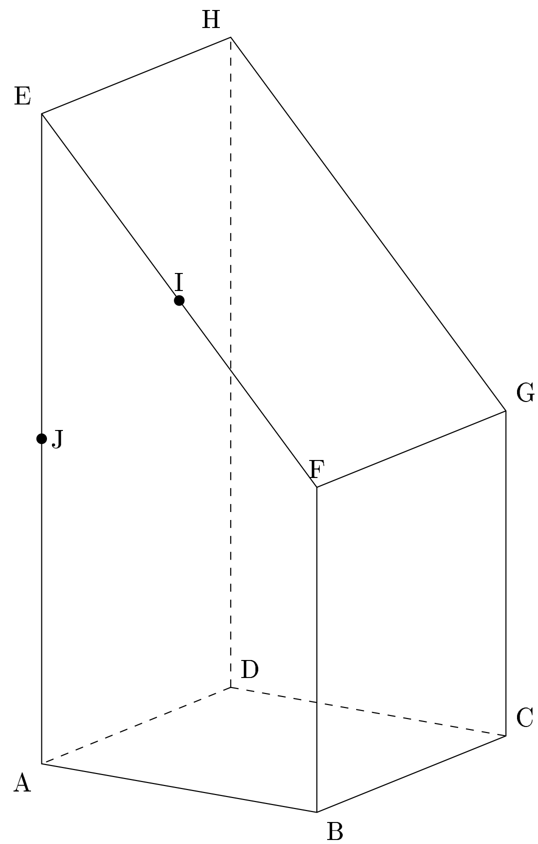
Exercice 3. 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Les questions sont indépendantes.

On considère le prisme droit ABFEDCGH tel que AB = AD.

Sa base ABFE est un trapèze rectangle en A, vérifiant $\overrightarrow{BF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

On note I le milieu du segment [EF].
On note J le milieu du segment [AE].
On associe à ce prisme le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ tel que :
$\vec{\imath} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{\jmath} = \overrightarrow{AD}$; $\vec{k} = \overrightarrow{AJ}$



1. On donne les coordonnées de quatre vecteurs dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Lequel est un vecteur normal au plan (ABG) ?
   a. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
2. Parmi les droites suivantes, laquelle est parallèle à la droite (IJ) ?
   a. (DG) **b.** (BD) **c.** (AG) **d.** (FG)
3. Quels vecteurs forment une base de l'espace ?
   a. $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CG}\right)$ **b.** $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}\right)$ **c.** $\left(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DG}\right)$ **d.** $\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CG}; \overrightarrow{CE}\right)$
4. Une décomposition du vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme somme de plusieurs vecteurs **deux à deux orthogonaux** est :
   a. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG}$ **b.** $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AJ}$
   c. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JG}$ **d.** $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG}$
5. Le volume du prisme droit ABFEDCGH, est égal à :
   a. $\dfrac{5}{8}$ **b.** $\dfrac{8}{5}$ **c.** $\dfrac{3}{2}$ **d.** 2

Exercice 4. 6 points

A - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan. On prendra 4 cm pour unité graphique.

1. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

   Étudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.
2. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

B - Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{kx}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.
On remarque que le cas $k=-1$ a été traité dans la partie B, car on a $f_{-1} = f$ et
$\mathcal{C}_{-1} = \mathcal{C}$.

1. (a) Quelle est la nature de la fonction f_0 ?
   (b) Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.
   Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_k$.
2. Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression : $(x+1)\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)$.
   En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$.
3. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.
   En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k. (On distinguera les cas : $k>0$ et $k<0$.)
4. Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$, et $\mathcal{K}$, correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k, parmi les entiers -1, -3, 1 et 2.
   Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.