BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2023/2024

BAC BLANC n°1

MATHÉMATIQUES

Spécialité Maths

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES **COEFFICIENT : 16**

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 3/5 .

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Chaque exercice choisi devra être rédigé sur une copie distincte.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (*5 points*)

1. Entre 1998 et 2020, en France 18 221 965 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 293 898 ont donné naissance à des jumeaux et 4 921 ont donné naissance à au moins trois enfants.

(a) Avec une précision de 0,1 % calculer parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage d'accouchements donnant naissance à des jumeaux sur la période 1998-2020.
(b) Vérifier que le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance à au moins trois enfants est inférieur à 0,1 %.

On considère alors que ce pourcentage est négligeable.
On appelle accouchement ordinaire, un accouchement donnant naissance à un seul enfant.
On appelle accouchement double, un accouchement donnant naissance à exactement deux enfants.
On considère dans la suite de l'exercice qu'un accouchement est soit ordinaire, soit double.
La probabilité d'un accouchement ordinaire est égale à $0{,}984$ et celle d'un accouchement double est alors égale à $0{,}016$.
Les probabilités calculées dans la suite seront arrondies au millième.

2. On admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise n accouchements.
On considère que ces n accouchements sont indépendants les uns des autres.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour.

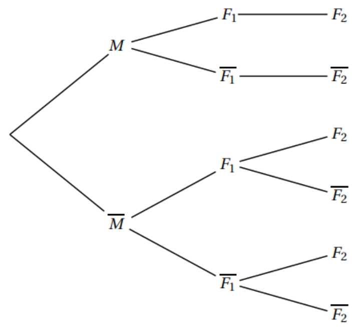
(a) Dans le cas où $n = 20$, préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double.
(b) Par la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer la plus petite valeur de n telle que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette maternité, parmi les naissances double, on estime qu'il y a 30 % de jumeaux monozygotes (appelés vrais jumeaux qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc 70 % de jumeaux dizygotes (appelés faux jumeaux , qui peuvent être de sexes différents: deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).
Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à $0{,}49$ et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à $0{,}51$.
Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né.
On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les évènements suivants :

- M : « les jumeaux sont monozygotes » ;
- F_1 : « le premier nouveau-né est une fille » ;
- F_2 : « le second nouveau-né est une fille ».

On notera $P(A)$ la probabilité de l'évènement A et $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

(a) Recopier puis compléter l'arbre pondéré ci-dessus.
(b) Montrer que la probabilité que les deux nouveaux-nés soient des filles est 0,31507.
(c) Les deux nouveaux-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.



Exercice 2 (*5 points*)

Partie A

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1 - x)$$

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$.
Calculer u_1 puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout rentier naturel $n, u_n \leqslant u_{n+1}$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. Justifier que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{1}{2}$.

Partie B

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.
En 2022, cette population compte 3000 individus.

On note P_n l'effectif en milliers de la population l'année $2022 + n$. Ainsi $P_0 = 3$.
Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du XIXe siècle, on considère que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.

(a) Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

(b) Déterminer la limite de P_n.

2. Dans cette question $b = 0{,}2$.

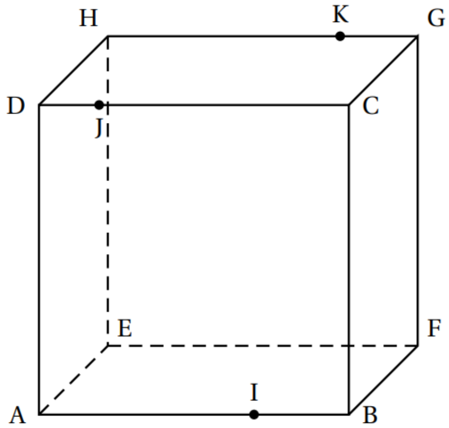
(a) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 0{,}1 \times P_n$.
Calculer v_0 puis montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n(1 - v_n)$.

(b) Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.

Exercice 3 (*5 points*)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les cinq questions sont indépendantes.



On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre et les points l, J et K définis par les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} \quad , \quad \overrightarrow{HK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$$

1. La section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est :

a. Un triangle	***b.*** Un quadrilatère	***c.*** Un pentagone	***d.*** Un hexagone

2. Les droites (BF) et (HG) sont :

a. Sécantes	***b.*** Parallèles	***c.*** Non coplanaires	***d.*** Coplanaires

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(0\,;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A$(-1\,;\ 2\,;\ 5)$, B$(3\,;\ 6\,;\ 3)$, C$(3\,;\ 0\,;\ 9)$ et D$(8\,;\ -3\,;\ -8)$.
On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

3. ABC est un triangle :

a. isocèle rectangle en A	***b.*** isocèle rectangle en B	***c.*** isocèle rectangle en C	***d.*** équilatéral

4. Soit la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \quad 5 + t \\ y = \quad 3 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$, avec t réel.

Les droites (BC) et Δ sont :

a. Confondues	***b.*** Sécantes	***c.*** strictement parallèles	***d.*** non coplanaires

5. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont :

a. Egaux	***b.*** Colinéaires	***c.*** Non coplanaires	***d.*** Non colinéaires

Exercice 4 (5 points)

Les parties A *et* B *peuvent être traitées de façon indépendante.*

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1000 °C.
À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.
On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.
La température du four est exprimée en degré Celsius (°C).
La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70°C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

Partie A

Pour un nombre entier naturel n, on note T_n la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant oà[1] il a été éteint. On a donc $T_0 = 1000$.
La température T_n est calculée par l'algorithme suivant :

$T \leftarrow 1000$
Pour i allant de 1 à n
    $T \leftarrow 0{,}82 \times T + 3{,}6$
Fin Pour

1. Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement.

2. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20$.

3. Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

Partie B

Dans cette partie, on note t le temps (en heure) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.
La température du four (en degré Celsius) à l'instant t est donnée par la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif, par : $f(t) = a\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + b$, où a et b sont deux nombres réels.
On admet que f vérifie la relation suivante : $f'(t) + \frac{1}{5}f(t) = 4$.

1. Déterminer les valeurs de a et b sachant qu'initialement, la température du four est de 1000°C, c'est-à-dire que $f(0) = 1000$.

2. Pour la suite, on admet que, pour tout nombre réel positif t:

$$f(t) = 980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20$$

(a) Déterminer la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$.
(b) Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
En déduire son tableau de variations complet.
(c) Avec ce modèle, après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

3. Dans cette question, on s'intéresse à l'abaissement de température (en degré Celsius) du four au cours d'une heure, soit entre deux instants t et $(t + 1)$. Cet abaissement est donné par la fonction d définie, pour tout nombre réel t positif, par : $d(t) = f(t) - f(t + 1)$.

(a) Vérifier que. pour tout nombre réel t positif: $d(t) = 980\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$.
(b) Déterminer la limite de $d(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
Quelle interprétation peut-on en donner ?