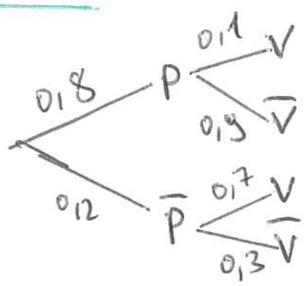
EXERCICE 1

1)



2) Calculons $\mathbb{P}(V)$.

$\{P;\overline{P}\}$ est un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V \cap P) + \mathbb{P}(V \cap \overline{P}).$$

Comme $\mathbb{P}(P) > 0$ et $\mathbb{P}(\overline{P}) > 0$, d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(P) \times \mathbb{P}_P(V) + \mathbb{P}(\overline{P}) \times \mathbb{P}_{\overline{P}}(V)$$

$$= 0,8 \times 0,1 + 0,2 \times 0,7$$

$$\boxed{\mathbb{P}(V) = 0,22}$$

3) Calculons $\mathbb{P}_V(P)$.

Par définition :

$$\mathbb{P}_V(P) = \frac{\mathbb{P}(V \cap P)}{\mathbb{P}(V)}$$

$$= \frac{0,8 \times 0,1}{0,22}$$

~~$\mathbb{P}_V(P) \approx 0,36$~~ $\boxed{\mathbb{P}_V(P) = \frac{4}{11}}$

EXERCICE 2

1) Déterminons f'.

* $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 + 2x$ et $v(x) = x - 1$.

u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et v s'annule en 1, donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

* $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ où $u'(x) = 2x + x$ et $v'(x) = 1$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x-1) - (x^2+2x) \times 1}{(x-1)^2}$$

$$\cancel{= \frac{2x^2 - 2x + 2x - x - x^2 - 2x}{(x-1)^2}}$$

$$\cancel{= 2x^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x + 2x - 2 - x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.}$$

2) Résolvons $g(x) = 0$.

g est polynomiale de degré deux avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = -2$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 12$.

$\Delta > 0$ donc g admet deux racines réelles distinctes.

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{12}}{2 \times 1} = 1 - \sqrt{3}$$

et $\beta = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2)+\sqrt{12}}{2a} = 1+\sqrt{3}$.

La fonction polynomiale g de degré est du signe de son coefficient dominant $a = 1 > 0$ sauf entre ses racines, donc :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

avec $\begin{cases} \alpha = 1-\sqrt{3} \\ \beta = 1+\sqrt{3}. \end{cases}$

3) Etudions les variations de f.

$f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$ or $(x-1)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

donc f' est du signe de g.

Nous déduisons de la question précédente :

x	$-\infty$		α		1		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	

où $\begin{cases} f(\alpha) \approx 0,536 \\ f(\beta) \approx 7,464 \end{cases}$

EXERCICE 3

1) $\boxed{2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AL} + 2\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AN}}$

2) $\boxed{\overrightarrow{KG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.}$

3) $\boxed{\text{(DB) est dirigée par } \overrightarrow{QM} \text{ et ne passe pas par H.}}$

4) $\boxed{\text{La droite passant par H et de vecteur directeur } \overrightarrow{GS} \text{ est (HR).}}$

EXERCICE 4

1) Démontrons par récurrence que $u_n = -\frac{5}{2^n} + 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* Initialisation.

$u_0 = 1$ d'après l'énoncé et $-\frac{5}{2^0} + 6 = 1$

donc : $u_0 = -\frac{5}{2^0} + 6$.

* Hérédité.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_k = -\frac{5}{2^k} + 6$ et démontrons que : $u_{k+1} = -\frac{5}{2^{k+1}} + 6$

Par construction de (u_n) :

$$u_{k+1} = \frac{1}{2} u_k + 3$$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2^n} + 6\right) + 3$$

$$= -\frac{5}{2^{n+1}} + 3 + 3$$

$$= -\frac{5}{2^{n+1}} + 6.$$

Donc on a bien $u_{k+1} = -\frac{5}{2^{n+1}} + 6$.

* Conclusion

Nous avons donc démontré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{5}{2^n} + 6.}$$

2)

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6}$

EXERCICE 5

Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n(1-u_n) \end{cases}$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Déterminez la limite de (u_n).

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $0 \leq \frac{1}{2} < 1$ et $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

Question bonus.

Notons $f(x) = \frac{1}{2}x(1-x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$. $\quad f'(x) = +x - \frac{1}{2}$

Donc

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(1/2)$	$\nearrow$	

Donc f est croissante sur $[0;+\infty[$.

Puis démonstration par récurrence de $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.