48 Concentration, loi des grands nombres.

I Inégalités de concentration.

Lemme 1 - Inégalité de Markov.

Soit X une variable aléatoire réelle positive.

Pour tout $a > 0$,
$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Théorème 1 - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit X une variable aléatoire réelle finie. On note $\mu := \mathbb{E}(X)$ et $V := \mathbb{V}(X)$.

Quel que soit $x \in \mathbb{R}$
$$\mathbb{P}\left(|X - \mu| \geqslant x\right) \leqslant \frac{V}{x^2}.$$

Exercice 1.

On lance 3 600 fois une pièce non truquée. On note X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus.

1. Écrivez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dans ce cas.
2. Minorez la probabilité que le nombre d'apparition de piles soit strictement compris entre 1 600 et 2 000.

Exercice 2.

On note X le nombre d'avions atterrissant sur un aéroport sur le créneau horaire 14h-15h. On estime qe $\mathbb{E}(X) = 16$ et $\mathbb{V}(X) = 4$.

1. Écrivez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à X.
2. Déterminez une minoration de la probabilité qu'il arrive entre 12 et 20 avions sur cet aéroport entre 14h et 15h.

Exercice 3.

On considère une variable aléatoire X l'espérance μ et d'écart-type σ.

1. Écrivez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à X.
2. Déterminez les valeurs de σ pour que nous ayons $\mathbb{P}\left(|X - \mu| < 15\right) \geqslant 0,96$.

Exercice 4.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'objets produits par une entreprise. On sait que $\mathbb{E}(X) = 50$ et $\mathbb{V}(X) = 25$.

1. (a) Justifiez que $\mathbb{P}(X \geqslant 75) \leqslant \mathbb{P}(|X - 50| \geqslant 25)$.

   (b) Majorez la probabilité que la production du mois à venir dépasse 75 objets.

2. Minorez la probabilité que la production du mois à venir soit strictement comprise entre 40 et 60 matelas.

Exercice 5.

Un avion peut transporter 100 passagers et leurs bagages. Sans les passagers, ni les bagages, mais avec l'équipage et le carburant il pèse 120 tonnes. Les consignes de sécurité interdisent le décollage de l'appareil si le poids dépasse $129,42$ tonnes. Les 100 places sont occupées.
Le poids d'un voyageur suit une loi d'espérance 70 kg et d'écart-type 10 kg. Le poids de ses bagages suit une loi d'espérance 20 kg et d'écart-type 10 kg. Toutes ces variables sont supposées indépendantes.

1. (a) Calculez l'espérance du poids de l'avion au décollage.

   (b) L'espérance calculée est-elle conforme aux normes de sécurité ?

2. Calculez l'écart-type du poids total de l'appareil.

3. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouvez un majorant de la probabilité pour que le poids réel de l'appareil au décollage dépasse $129,42$ tonnes.

Corollaire 1

Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V.
Quel que soit x réel,

$$\mathbb{P}(|M_n - \mu| \geqslant x) \leqslant \frac{V}{nx^2}.$$

Exercice 6.

On effectue n tirages successifs avec remise d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. Notons X la variable aléatoire qui à un tirage associe 1 si boule tirée est rouge et 0 sinon. Notons encore M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

1. Déterminez $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ puis donnez l'inégalité de concentration relative à M_n.
2. À partir de quel nombre de tirages pouvons-nous garantir à plus de 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera strictement entre $0,35$ et $0,45$.

Exercice 7.

Une épreuve consiste à tirer au hasard 10 jetons avec remise dans un sac contenant 40 % de jetons bleus. On appelle X la variable aléatoire qui, à cette série de tirages, associe le nombre de jetons bleus obtenus.

1. (a) Justifiez que X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $0,4$.
   (b) Déterminez l'espérance de X.
   (c) Montrez que la variance de X est $2,4$.
2. Montrez en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que $\mathbb{P}(|X-4| \geqslant 2) \leqslant 0,6$.
3. (a) Quel est l'événement contraire de l'événement $\{|X-4| \geqslant 2\}$?
   (b) Montrez que $\mathbb{P}(|X-4| < 2) \geqslant 0,4$.

Exercice 8.

Soit T la variable aléatoire qui à chaque enfant français de 1 an associe sa taille en centimètre.
Des statistiques permettent d'estimer que cette variable a pour espérance 50 et pour écart-type 2.

1. Déterminez l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de T de taille 10 000.
2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorez la probabilité que cette taille moyenne s'écarte de 50 cm d'au moins $0,1$ cm.

Exercice 9.

II Loi faible des grands nombres.

Corollaire 2 - Théorème de la loi faible des grands nombres.

Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ.

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(|M_n - \mu| \geqslant x\right) = 0.$$

III Exercices.

Exercice 10.

Exercice 11.

Exercice 12.

Exercice 13.