47 Calculer l'aire entre deux courbes.

Dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ le calcul de l'aire se fait en unités d'aires : $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.

Proposition 1

(i) Soit $\mathscr{A}$ l'aire délimitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
Si f est positive sur $[a,b]$ alors $\mathscr{A} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Si f est négative sur $[a,b]$ alors $\mathscr{A} = \int_a^b -f(t)\,\mathrm{d}t$.
Sinon $\mathscr{A} = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

(ii) Soit $\mathscr{A}$ l'aire délimitée par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
Si $f \leqslant g$ alors $\mathscr{A} = \int_a^b g(t) - f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 1.

Soient $f : x \mapsto x^2 - \frac{3}{x}$ et $g : x \mapsto x^2$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculez l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$.

Exercice 2.

Soient $f : x \mapsto 3x^2 - 7x + 2$ et $g : x \mapsto x^2 - 5x + 6$ définies sur $\mathbb{R}$. Calculez l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

Exercice 3.

Soit $f : x \mapsto x - 3 + \mathrm{e}^{-2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Montrez que $\mathscr{D} :\ y = x - 3$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
2. Étudiez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.
3. Déduisez-en l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \ln(2)$.

Exercice 4.