46 Intégration par parties.

I Une astuce pour calculer une intégrale.

Nous connaissons une formule pour calculer la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$. Nous allons utiliser cette formule pour calculer certaines intégrale qui restaient pour l'heure rétive au calcul.

Théorème 1 - Formule d'intégration par parties.

Soient :

. a et b des réels avec $a \leqslant b$,

. u et v des fonctions dérivables sur $[a, b]$ dont les dérivées sont continues.

Pour tout a et b de I :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t.$$

II Exercices.

Exercice 1.

À l'aide d'une intégration par parties calculez les intégrales suivantes.

a) $\int_0^\pi t\sin(t)\ \mathrm{d}t$.

b) $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$.

c) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-2x}\ \mathrm{d}x$.

Exercice 2.

En procédant à deux intégrations par parties calculez $I = \int_0^\pi x^2\sin(x)\ \mathrm{d}x$.

Exercice 3.

Calculez $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\sin(x)\ \mathrm{d}x$.

Exercice 4.

Une entreprise produit x centaines d'objets chaque semaine. Le coût de production exprimé en milliers d'euros, est défini sur l'intervalle $[0; 5]$ par la fonction C telle que : $C(x) = (4x + 1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. En utilisant une intégration par parties, calculez la valeur moyenne de la fonction C sur l'intervalle $[0; 5]$. Vous arrondirez le résultat à 10^{-3} près.
2. Quelle interprétation peut-on faire du résultat précédent pour l'entreprise ?

Exercice 5.

Calculez $I = \int_0^1 (2t-1)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$, $J = \int_0^{\mathrm{e}} t^2(1-2\ln(t)) \,\mathrm{d}t$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2t-1)\sin(t) \,\mathrm{d}t$.

Exercice 6.

Notons $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2t-3)\cos^2(t) \,\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2t-3)\sin^2(t) \,\mathrm{d}t$.

1. Calculez $I + J$.
2. Calculez $I - J$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Déduisez-en les valeurs de I et J.

Exercice 7.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers strictement positifs.
Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \,\mathrm{d}x$.

1. (a) Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1\,;\,\mathrm{e}[$, et pour tout n entier naturel, on a :
$$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$$
   (b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
2. (a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.
   (c) En déduire I_2, I_3 et I_4. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e, et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.
3. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geqslant 0$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n \leqslant \mathrm{e}$.
   (c) En déduire la limite de I_n.
   (d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

Exercice 8.

On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $x_n = \int_0^1 t^n \cos(t)\,\mathrm{d}t$ et $y_n = \int_0^1 t^n \sin(t)\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Justifiez que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.
   (b) Étudiez le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Déduisez-en que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. (a) Démontrez que pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (b) Déduisez-en la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. (a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.
   (b) Déduisez-en la limite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 9.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x^2$$

dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, est donnée sur le graphique ci-dessous à compléter et à rendre avec la copie.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - x$ et on note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans le même repère.

Partie A : Remarques préliminaires concernant la fonction f

1. Sans chercher à déterminer son équation, tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par O. On notera A son point de contact avec $\mathcal{C}_f$. Évaluer graphiquement le coefficient directeur de cette tangente en expliquant le procédé utilisé.
2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. En déduire une interprétation graphique du nombre réel : $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - \dfrac{7}{3}$.

Exercice 9. - suite

Partie B : Étude de la fonction g

1. Étudier les limites de g en $+\infty$ et en 0 et justifier que $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote.
2. (a) Calculer la dérivée $g'(x)$ et montrer qu'elle est du signe de $(x-1)e^x - x^2$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   (b) Soit u la fonction qui à tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ associe $u(x) = (x-1)e^x - x^2$. Étudier le sens de variation de u sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   (c) Déterminer le signe de $u(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1[$.

   (d) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique a sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

   En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $u(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   (e) En déduire le signe de $g'(x)$ et dresser la tableau de variation de g.

Partie C : Construction de $\mathcal{C}_g$

1. On se propose de construire le point $S(a\ ;\ g(a))$ où a est le réel déterminé dans la question B. 2. d.

   (a) Montrer que, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = 0$ équivaut à $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ et que par conséquent $f'(a) = \dfrac{f(a)}{a}$.

   (b) En utilisant ce résultat, établir que a est l'abscisse du point A défini dans la première partie.

   (c) Justifier que l'ordonnée de S est $f'(a)$ et placer S sur le dessin.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
3. Construire la courbe $\mathcal{C}_g$.

Exercice 9.

Partie D : Étude d'une primitive de g et calcul d'une intégrale

Soit G la primitive de g sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ qui s'annule pour $x = 1$ (on ne cherchera pas à calculer cette primitive).

1. Déterminer le sens de variation de G sur $[1\,;\,2]$.
2. Donner une interprétation géométrique du nombre $G(2)$. Dans la suite, on prendra $1,55$ comme valeur approchée de $G(2)$ à 10^{-2} près.
3. On considère l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^2 G(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Justifier que l'intégrale I calculée dans la première partie peut s'écrire
   $$I = \int_1^2 xg(x)\,\mathrm{d}x.$$
   (b) En utilisant une intégration par parties, établir que $I = 2G(2) - J$ et en déduire une valeur approchée de J, à 10^{-2} près.

Exercice 10.

Exercice 11.