45 Intégrales, propriétés.

I Les propriétés de l'intégrale.

Par convention (et pour que ce soit cohérent avec la relation de Chasles ci-dessous), si f est continue sur $[a, b]$, nous noterons :

$$\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t := -\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Les propriétés suivantes se conjecturent aisément par des considérations graphiques. Ce sont des propriétés indispensables pour des calculs d'aires. Si les intégrales de Riemann ne les avaient satisfaites nous aurions oublié ce procédé pour un autre.

Proposition 1 - Propriétés de l'intégrale.

Soient :

. $(a, b, c, \lambda) \in \mathbb{R}^4$,

. f une fonction continue sur $[a, b]$.

Si la surface est réduite à un segment l'aire est nulle :

$$\int_a^b 0\ \mathrm{d}t = 0.$$

Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

Linéarité :

$$\int_a^b \lambda f(t) + g(t)\ \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Croissance (et donc positivité), pour $a < b$:

$$f \leqslant g \Rightarrow \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 1.

Écrivez chaque expression à l'aide d'une seule intégrale.

a) $\displaystyle\int_{-4}^{6} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{-5}^{-4} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{6}^{10} f(x)\ \mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_{10}^{14} g(t)\ \mathrm{d}t - \int_{5}^{0} g(t)\ \mathrm{d}t + \int_{5}^{10} g(t)\ \mathrm{d}t.$

c) $\displaystyle 3\int_{1}^{2} g(x)\ \mathrm{d}x + 5\int_{1}^{2} g(x)\ \mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle -4\int_{3}^{5} f(x)\ \mathrm{d}x - 5\int_{5}^{3} g(x)\ \mathrm{d}x.$

Exercice 2.

Soit $f$la fonction définie sur $]-1,+\infty$ par $f(x) = \frac{2x^2+x}{x+1}$.

1. Démontrez : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$.
2. Calculez $I = \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$.
3. Déterminez une valeur approchée de I.

Exercice 3.

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x+6}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

1. Démontrez que : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3}$.
2. Calculez $I = \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x$.

Exercice 4.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Montrez que : $\forall x \in [1;3],\ \frac{1}{10} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
2. Déduisez-en que $\frac{1}{5} \leqslant \int_1^3 f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant 1$.

Exercice 5.

f est la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Montrez que : $\forall x \in [0;15],\ 1 \leqslant f(x) \leqslant 4$.
2. Déduisez-en un encadrement de $\int_0^{15} f(x)\ \mathrm{d}x$.

Exercice 6.

1. Montrez que : $\forall t \in [1, +\infty[,\ 0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$.
2. Déduisez-en que : $\forall x \in [1, +\infty[,\ 0 \leqslant \int_1^x e^{-t^2} \leqslant e^{-1}$.

Exercice 7.

Montrez que : $0 \leqslant \int_0^1 x e^x \, dx \leqslant e$.

Exercice 8.

On souhaite calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t + 1} \, dt$. Posons $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{e^t + 1} \, dt$.
Calculez J, puis $I + J$ et déduisez-en I.

Exercice 9.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \sin(t) e^{-nt} \, dt$.
Montrez que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

II Valeur moyenne d'une fonction.

1 Inégalités de la moyenne.

Proposition 2

Soient :

. a et b deux réels tels que $a < b$,

. f une fonction continue sur $[a, b]$,

. m et M des réels.

Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a, b]$ alors

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(t) \, dt \leqslant M(b - a).$$

Exercice 10.

Démontrez que $-2 \leqslant \int_1^3 \sin(x^2) \, dx \leqslant 2$.

Exercice 11.

Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\ \mathrm{d}t$. Démontrez que $0 \leqslant I \leqslant \frac{\pi^2}{4}$ sans calculer I.

Exercice 12.

Soit f la fonction définie sur $[-1; 0]$ par

$$f(x) = \frac{3x+4}{(x+2)^2}.$$

1. Dressez le tableau de variation de f.
2. Déduisez-en un encadrement de $f(x)$ sur $[-1; 0]$.
3. Montrez que
$$1 \leqslant \int_{-1}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{9}{8}.$$

Exercice 13.

On considère la suite, définie pour tout entier $n \geqslant 3$ par : $u_n = \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\ \mathrm{d}t$.

1. Étudiez la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.
2. Déduisez-en un encadrement de u_n pour chaque $n \geqslant 3$.
3. Concluez quant à la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

Exercice 14.

1. En considérant la fonction inverse justifiez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$.
2. Déduisez-en que, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} \leqslant \ln(n+1) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.
3. Déduisez en la convergence ou la divergence de $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. *Cette suite de somme est appelée la série harmonique.*
4. Proposez un algorithme en Python qui donne un encadrement de $\ln(n)$ pour n un entier naturel non nul.

Corollaire 1 - Inégalité de la moyenne (avec valeur absolue).

Si $|f(x)| \leqslant M$ alors $\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant M(b-a)$.

2 Valeur moyenne d'une fonction.

Définition 1

Soient :

. a et b des réels avec $a < b$,

. f une fonction continue sur $[a, b]$.

Nous appellerons *valeur moyenne de f sur $[a, b]$* le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 15.

Lors d'une épidémie de grippe, le nombre de malades, t jours après l'apparition des premiers cas, est modélisé par la fonction f définie sur $[0; 6]$ par $f(t) = 6t^2 - t^3$.

1. Calculez la valeur moyenne μ de la fonction f sur l'intervalle $[0; 6]$.
2. Donnez une interprétation de ce résultat.

Exercice 16.

Un mobile est étudié sur l'intervalle de temps $[0; 20]$. le temps est exprimé en secondes. La vitesse du mobile en $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, est donné par : $v(t) = 2t^2 + 3t$.

1. Calculez la valeur moyenne de la fonction v sur $[0; 20]$.
2. Que représente cette valeur moyenne ?

Exercice 17.

Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la progression.
On note $f(t)$ la concentration dans le sang (en mg/L) en fonction du temps (en heures) d'un antibiotique administré en une seule dose à un animal, t appartenant à l'intervalle $[0; 24]$.
On admet que pour t dans cet intervalle

$$f(t) = \frac{50t}{t^2 + 4}.$$

Calculez la concentration moyenne de l'antibiotique pendant les 10 premières heures. Donnez la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.

III Exercices.

Exercice 18.

Soit $I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n : x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-x}$.

1. Conjecturez le sens de variation de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis démontrez-le.
2. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ et déduisez-en la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 19.

1. Démontrez que pour tout $x \in [0;1]$: $0 \leqslant x\mathrm{e}^{-x} \leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}$.
2. Déduisez-en que $0 \leqslant \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

Exercice 20.

Pour n un entier naturel non nul on pose : $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n\ \mathrm{d}x$ et $J_n = \int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} (\ln(x))^n\ \mathrm{d}x$.

1. Justifiez que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
2. Quel est le sens de variation de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Exercice 21.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int 0^1 \frac{x^n}{1+x}\ \mathrm{d}x$.

1. Calculez u_0.
2. (a) Démontrez que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.
   (b) Déduisez-en la valeur de u_1.
3. Démontrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 22.

Soient $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\ \mathrm{d}x$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\ \mathrm{d}x$.

1. (a) Justifiez que pour tout $x \in [0;1]$: $\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.
   (b) Montrez que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1.
2. (a) Montrez que, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (b) Déduisez-en la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. (a) Calculez pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + J_n$.
   (b) Déterminez la limite de la suite (I_n).

Exercice 23.