44 Intégrale, théorème fondamental de l'analyse.

I L'intégrale.

1 Aspect historique et géométrique.

2 L'intégrale de Riemann pour calculer des aires.

Définition 1

Soient :

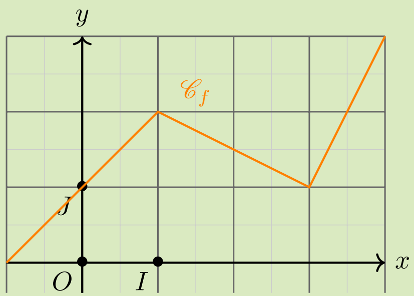
. a et b des réels $a < b$,

. f une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et deux droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, et notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est appelée *intégrale de f sur $[a; b]$*.

Exercice 1.

On considère une fonction f dont la courbe représentative est dessinée ci-dessous.



Déterminez

a) $I_1 = \int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t$.

b) $I_2 = \int_{1}^{2} f(t)\ \mathrm{d}t$.

c) $I_3 = \int_{2}^{3} f(t)\ \mathrm{d}t$.

d) $I_4 = \int_{-1}^{3} f(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 2.

Au moyen de considérations géométriques élémentaires, calculez :

a) $\mathscr{A}_1 = \int_2^3 m \, \mathrm{d}t$ avec $m > 0$.

b) $\mathscr{A}_2 = \int_a^b m \, \mathrm{d}t$ avec $m > 0$ et $a < b$.

c) $\mathscr{A}_3 = \int_1^2 t \, \mathrm{d}t$.

d) $\mathscr{A}_4 = \int_{-1}^1 -x + 1 \, \mathrm{d}x$.

e) $\mathscr{A}_5 = \int_2^2 4x \, \mathrm{d}x$.

f) $\mathscr{A}_6 = \int_{-100}^{100} 0 \, \mathrm{d}x$.

Exercice 3.

Soit f la fonction affine par morceaux définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, \text{ si } x \leqslant 2 \\ -2x + 6 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Au moyen de considérations géométriques élémentaires, calculez l'aire $\mathscr{A} = \int_0^4 f(t) \, \mathrm{d}t$ de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.

II Théorèmes fondamentaux de l'analyse.

Théorème 1 - Premier théorème fondamental de l'analyse.

Soient :

. $a < b$ des réels,

. f une fonction continue et positive sur $[a; b]$.

Si F est la fonction définie sur $[a; b]$ par

$$\forall x \in [a; b], \; F(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t.$$

alors

$$\forall x \in [a; b], \; F'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad F(a) = 0.$$

Théorème 2 - Second théorème fondamental de l'analyse, formule de Newton-Leibniz.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ avec $a < b$ des réels et F une primitive de f sur $[a;b]$.

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

III Généralisation.

Définition 2

Soient :

. $a < b$ des réels,

. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue,

. F une primitive de f sur $[a,b]$.

Nous appellerons *intégrale de f sur $[a,b]$* le nombre réel

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x := F(b) - F(a).$$

Exercice 4.

Démontrez que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x-3)\mathrm{e}^{-x}$, est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f, définie par $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

Déduisez-en la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (2t+1)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 5.

Calculez les intégrales suivantes.

a) $\int_1^4 \frac{3}{x}\ \mathrm{d}x.$

b) $\int_0^2 -4t^2+1\ \mathrm{d}t.$

c) $\int_{-1}^1 (1+s)^2\ \mathrm{d}s.$

d) $\int_0^{1/2} \mathrm{e}^{2y}\ \mathrm{d}y.$

e) $\int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t.$

f) $\int_0^5 \frac{1}{u+2}\ \mathrm{d}u.$

g) $\int_1^2 \frac{-2}{x^3}\ \mathrm{d}x.$

h) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(y)\ \mathrm{d}y.$

i) $\int_0^2 -2t^3+4t^2-5t\ \mathrm{d}t.$

j) $\int_{10}^{12} \frac{2u}{u^2-8}\ \mathrm{d}u.$

k) $\int_1^2 6x(x^2+4)^3\ \mathrm{d}x.$

l) $\int_0^{\pi/3} 3\sin\left(3y+\frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{d}y.$

m) $\int_0^1 -3\mathrm{e}^{-3x}\ \mathrm{d}x.$

n) $\int_0^{1/2} \pi\sin(\pi x)\ \mathrm{d}x.$

o) $\int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2}\ \mathrm{d}x.$

p) $\int_{-1}^1 15t^4(t^5+2)^3\ \mathrm{d}t.$

q) $\int_4^{25} \frac{5}{\sqrt{x}}+3x\ \mathrm{d}x.$

r) $\int_{-2}^3 \cos(\pi x)\ \mathrm{d}x.$

s) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\ \mathrm{d}x.$

t) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{2t+1}}\ \mathrm{d}t.$

u) $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}\ \mathrm{d}x.$

v) $\int_0^1 \frac{t^4}{(t^5+3)^3}\ \mathrm{d}t.$

w) $\int_1^2 \frac{1}{(1+x)^2}\ \mathrm{d}x.$

x) $\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{x^3}\ \mathrm{d}x.$

y) $\int_1^2 \frac{3}{x^4}\ \mathrm{d}x.$

z) $\int_0^3 \frac{1}{2x+1}\ \mathrm{d}x.$

Exercice 6.

a) $\displaystyle\int_0^1 -3x+2 \,\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x.$

c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) \,\mathrm{d}x.$

e) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^2+2x \,\mathrm{d}x.$

f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-2x} \,\mathrm{d}x.$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3x+2} \,\mathrm{d}x.$

h) $\displaystyle\int_{-1}^1 t^2+2t-1 \,\mathrm{d}x.$

i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \,\mathrm{d}u.$

j) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3y) \,\mathrm{d}y.$

k) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2}{z^3} \,\mathrm{d}z.$

l) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2t)-\sin(t) \,\mathrm{d}t.$

m) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(3x)-4\cos(x) \,\mathrm{d}x.$

n) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) \,\mathrm{d}x.$

o) $\displaystyle\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{-2x+1} \,\mathrm{d}x.$

p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{5}{2x-3} \,\mathrm{d}x.$

q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-3}{5} \,\mathrm{d}x.$

r) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{3x} \,\mathrm{d}x.$

s) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}x.$

t) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x.$

Exercice 7.

Calculez les intégrales.

a) $\displaystyle\int_0^4 t-3\,\mathrm{d}t.$

b) $\displaystyle\int_{-1}^2 t^2-4t+3\,\mathrm{d}t.$

c) $\displaystyle\int_1^2 t^2+t-\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$

d) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$

e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t.$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2t)\,\mathrm{d}t.$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t+2)^3}\,\mathrm{d}t.$

h) $\displaystyle\int_0^1 5t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$

i) $\displaystyle\int_{\ln(a)}^{\ln(b)} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ pour $0<a\leqslant b$.

j) $\displaystyle\int_0^2 5\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t.$

k) $\displaystyle\int_1^9 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$

l) $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}u}{(2u+1)^2}.$

m) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5-x}}.$

n) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)(x^2+x+1)\,\mathrm{d}x.$

o) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{3x+2}.$

p) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{3t-4}\mathrm{d}t.$

q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+3t}}.$

r) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

s) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{t^3}{t^4+2}\,\mathrm{d}t.$

t) $\displaystyle\int_0^1 (x-2)(x^2-4x+1)^2\,\mathrm{d}x.$

u) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$

v) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t.$

w) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$

x) $\displaystyle\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t.$

IV Exercices.

44 Intégrale, théorème fondamental de l'analyse.