43 Équations différentielles linéaires d'ordre un à coefficients constants.

I Vocabulaire.

Exercice 1.

Parmi les fonctions $f_1 : x \mapsto e^{4-x}$, $f_2 : x \mapsto -e^{4x}$, $f_3 : x \mapsto e^{4-\frac{1}{4}x}$ et $f_4 : x \mapsto 4e^{\frac{1}{4}x}$, déterminez les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles proposées.

a) $y' = -y$.

b) $4y' = y$.

c) $y' - 4y = 0$.

d) $4y' + y = 0$.

II L'équation homogène.

1 Cas général.

Proposition 1

L'équation différentielle $(E_0) : \; y' - ay = 0$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{ax}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Autrement dit l'ensemble des solutions de (E_0) est $\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto \lambda e^{ax} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 2.

a) $y' = 3y$.

b) $y' + 2y = 0$.

c) $2y' = y$.

d) $3y' - 5y = 0$.

2 Problème de Cauchy.

Corollaire 1 - Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' - ay = 0 \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

a) Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' = 2020y$.

b) Déterminez la solution f de l'équation (E) telle que $f(0) = 2$.

Exercice 4.

Résolvez les équations différentielles avec condition initiale.

a) $y' = \frac{1}{2}y$ et $f(0) = 1$.

b) $5y' = y$ et $f(1) = 0$.

c) $y' + y = 0$ et $f'(1) = 2$.

Exercice 5.

Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone. Tant qu'il est en vie, l'organisme d'un être vivant contient la même proportion de carbone 14. À sa mort la quantité de cet élément radioactif décroît.
On note $N(t)$ le nombre de noyaux de carbone 14 que contient un organisme t années après sa mort.
On admet que la fonction N est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,000121y$.

a) Résolvez l'équation différentielle (E) en prenant comme condition initiale $N(0) = N_0$ où $N_0 \in \mathbb{N}$.

b) On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps au bout duquel le nombre de noyaux à diminué de moitié. Calculez la demi-vie du carbone 14.

3 Structure de l'ensemble des solutions.

Proposition 2

L'ensemble des solutions de (E_0) est un espace vectoriel.

III L'équation avec second membre constant.

1 Principe de superposition.

Proposition 3

g est solution de E_1 si et seulement s'il existe des fonctions f_1 solution de (E_1) et f_0 solution de (E_0) telles que $g = f_1 + f_0$.

2 Résolution de (E_1).

Proposition 4

Soit f_1 une solution de (E_1).

$$\mathscr{S}_1 = \left\{ f_0 - \frac{b}{a} \mid f_0 \in \mathscr{S}_0 \right\}.$$

3 Problème de Cauchy.

Corollaire 2 - Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' - ay = b \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$

admet une unique solution.

Exercice 6.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -\frac{1}{2}y + 3$.

1. Donnez la seule solution constante sur $\mathbb{R}$ de (E).
2. Déduisez-en toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.

Résolvez sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a) $y' = -2y + 5$.

b) $y' = y - 3$.

c) $2y' + y = 4$.

d) $3y' - 6y = 1$.

Exercice 8.

Déterminez la solution de l'équation différentielle vérifiant la condition.

a) $y' = 3y - 6$ et $y(0) = -1$.

b) $y' = -5y + 4$ et $y(1) = 0$.

c) $y' = y - 1$ et $y(2) = 1$.

Exercice 9.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 0,8y + 1,6$.

1. Résolvez sur l'équation différentielle (E).
2. Vérifiez que toutes les solutions de (E) admettent une asymptote que vous préciserez.

Exercice 10.

IV Équation différentielle avec second membre quelconque.

Proposition 5

(E_2) : $y' - ay = f$.
Soit f_2 une solution de (E_2).

$$\mathscr{S}_2 = \{f_0 + f_2 \mid f_0 \in \mathscr{S}_0\}.$$

Exercice 11.

Vérifiez que f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-5x+1} + \frac{3}{5}$ et (E) : $y' = -5y + 3$.

b) $f(x) = 2x + 2$ et (E) : $y' = -2y + 4x + 6$.

c) $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-2x}$ et (E) : $y' = -2y + \mathrm{e}^{-2x}$.

Exercice 12.

Soit (E) : $y' = 2y + 2x$ une équation différentielle.

1. Vérifiez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x - \frac{1}{2}$ est une solution particulière de l'équation (E).
2. Déduisez-en toutes les solutions de (E).

Exercice 13.

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x}$ et l'équation différentielle (E) : $y' = y + \mathrm{e}^{x}$.

1. Vérifiez que la fonction f est une solution particulière de (E).
2. Déduisez-en la seule solution g de (E) telle que $g(0) = 5$.

Exercice 14.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = x^2 + x$

1. Trouvez les valeurs de a, b et c tels que la fonction g, définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E).
2. Déduisez-en les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15.

On peut modéliser le taux d'alcool, en fonction du temps exprimé en heures, par une fonction f définie sur $[0,005, +\infty[$.
On admet que f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -y + ke^{-t}$ et $f(0,005) = 0$ où k est une constante positive dépendant de la quantité d'alcool absorbée et de la corpulence de l'individu.

1. (a) Exprimez, en fonction de k, le nombre réel a tel que la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = ate^{-t}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
   (b) Déduisez-en l'expression de $f(t)$ en fonction de k.
2. Étudiez le sens de variation de f et vérifiez qu'il ne dépend pas de k.
3. Trois heures après avoir consommé de l'alcool l'alcoolémie d'un individu est de $0,8$ g $\cdot\, \ell$. Le taux maximum autorisé étant de $0,2$ g $\cdot\, \ell$, combien de temps devra-t-il attendre avant de reprendre le volant ?

Exercice 16.

V Exercices.

Exercice 17.