42 Somme de variables aléatoires.

I Échantillon de taille n.

Définition 1

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.
Un *échantillon de taille n* de la variable aléatoire X est une n-liste de variables aléatoires $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ indépendantes suivant toutes la même loi que X.

Proposition 1

Soient :

. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire,

. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de X,

. $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ la variable aléatoire somme de l'échantillon,

. $M_n = \frac{S_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne de l'échantillon.

$\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(S_n) = n\mathbb{V}(X)$, $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$.
$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(M_n) = \frac{1}{n}\mathbb{V}(X)$, $\sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$.

Exercice 1. D

On étudie la marche aléatoire d'une particule se déplaçant sur les points d'abscisses entières d'un axe gradué d'origine O. La particule est à l'origine au temps 0 et se déplace de chaque unité de temps d'une unité vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou d'une unité vers la gauche avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
On suppose les déplacements de la particule indépendants les uns des autres.
Pour tout entier naturel k non nul on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le k-ième déplacement a lieu vers la droite et qui vaut -1 dans le cas contraire.
Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n l'abscisse de la particule à l'instant n.

1. Donnez, pour tout entier naturel non nul k l'espérance et la variance de X_k.
2. Pour tout entier naturel non nul n, exprimer S_n en fonction de certaines des variables X_k.
3. En déduire l'espérance et la variance de S_n.

Exercice 2.

La masse en grammes d'un paquet de café est donnée par un variable aléatoire C d'espérance 250 et de variance 4.
Soit L la variable aléatoire donnant la masse en grammes d'un lot de deux paquets.
On suppose les masses des deux paquets indépendantes entre elles.
Déterminez $\mathbb{E}(L)$ et $\mathbb{V}(L)$.

Exercice 3.

Une machine remplit des pots de yaourts dont la masse en grammes est une variable aléatoire Y d'espérance 125 et d'écart-type $1,2$. On suppose que les remplissages des pots sont indépendants.

1. Exprimez la masse d'un lot de 16 comme la variable aléatoire somme S_{16} d'un échantillon de 16 pots.
2. Déterminez l'espérance de S_{16}.
3. Montrez que l'écart-type de S_{16} est $4,8$.

Exercice 4.

Une machine produit des joints dont l'épaisseur définit une variable aléatoire X d'espérance 2 mm et d'écart-type $0,1$ mm. Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

1. Déterminez l'espérance de M_n.
2. Calculez l'écart-type de M_{100} puis de $M_{10\,000}$.

Exercice 5.

Dans une population d'adultes la variable aléatoire X associe à chaque individu sa glycémie en milligrammes par 100 millilitres. On suppose que X a pour espérance 92 et pour écart-type 7. Soit M_{400} la variable aléatoire d'un échantillon de taille 400 de la variable aléatoire X. Déterminez l'espérance et l'écart-type de M_{400}.

Exercice 6.

Sur des paquets de cartes à collectionner il est écrit que 20 % des paquets comportent une et une seule carte rare.

1. Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire C qui à chaque paquet associe le nombre de cartes rares.
2. On achète 12 paquets : le nombre de cartes rares de ce lot est modélisé par un échantillon de taille 12 de la variable aléatoire C, noté $(C_1, \dots, C_{12})$. Expliquez pourquoi il est plausible d'affirmer que les variables aléatoires formant cet échantillon sont indépendantes.
3. Déterminez la loi de probabilité de $L = C_1 + \cdots + C_{12}$.
4. A-t-on plus de 50 % de chance d'avoir récupéré 4 cartes rares ?

II Application à la loi binomiale.

Proposition 2

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.
$\mathbb{E}(X) = np$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Exercice 7.

Une étude statistique a été réalisée sur le temps d'attente en secondes subi par la clientèle avant d'être mise en communication avec un standardiste.
La variable aléatoire T qui a tout client associe son temps d'attente a pour espérance 18 et pour écart-type 7. On estime que la probabilité qu'un client ait une attente de plus de 20 s est de $0,4$.

1. Au cours d'une même semaine un client passe 5 appels indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de fois que l'appel à dépassé 20 s. Déterminez l'espérance et l'écart-type de X.
2. Dans le but de diminuer le temps d'attente, on effectue une enquête sur un échantillon de 100 clients. Soit Y la variable aléatoire exprimant le temps d'attente moyen en secondes pour un échantillon de 100 clients. Déterminez l'espérance et l'écart-type de Y.

Exercice 8.

On interroge de manière indépendante 300 personnes lors d'un sondage sur la réalisation d'un projet d'urbanisme.
On note X_i la variable aléatoire qui vaut 0 si la i-ième personne interrogée est opposée au projet et 1 si elle y est favorable ; la probabilité qu'elle soit opposée au projet est $0,365$.

1. Donnez la loi de probabilité des X_i.
2. On note $S = X_1 + \cdots + X_{300}$. Donnez en justifiant la loi de probabilité de la variable aléatoire S puis calculez et interprétez $\mathbb{P}(S > 100)$.

Exercice 9.

Afin de mieux sécuriser les achats en ligne, certaines cartes bancaires ont un cryptogramme dynamique : ce code de sécurité qui figure au dos de la carte change chaque heure de manière « aléatoire » : chaque cryptogramme est composé de trois chiffres et les combinaisons de trois chiffres identiques, comme 111 ou 888 sont exclues.

1. Combien de cryptogrammes différents la carte bancaire peut-elle générer ?
2. Combien de cryptogrammes comporte deux fois le même chiffre ?
3. On note D la variable aléatoire valant 1 si le cryptogramme comportent deux fois le même chiffre et 0 sinon. Établissez la loi de probabilité de la variable aléatoire D.
4. $(D_1, \ldots, D_{24})$ est un échantillon de taille 24 de la variable aléatoire D et $S = D_1 + \cdots + D_{24}$. Calculez $\mathbb{P}(S \geqslant 2)$.

Exercice 10.

On réalise des semis dans des pots séparés et cultivés dans les mêmes conditions et on constate qu'ils survivent au bout de 2 mois dans 78 % des cas.

1. On note V la variable aléatoire qui à chaque semis associe 1 s'il est vivant au bout de deux mois et 0 sinon. Établissez la loi de V.
2. 500 semis ont été plantés. on les modélise par un échantillon $(V_1, \ldots V_{500})$ de taille 500 de V et on note $S = V_1 + \cdots + V_{500}$. Déterminez la loi de probabilité de S.
3. Calculez la probabilité $\mathbb{P}(S > 400)$ et interprétez ce résultat.

III Exercices.

Exercice 11.