40 Primitives.

I Définition.

Définition 1

Soit $f : E \to F$ une application.
On dit qu'une application F est *une primitive de f* sur E si et seulement si F est dérivable sur E et $F' = f$.

Exercice 1.

Déterminez une primitive de la fonction f (sans se préoccuper des domaines de définition).

a) $f(x) = 5(5x-1)^3$.

b) $f(x) = \cos(x)\sin^2(x)$.

c) $f(x) = -\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)^4$.

d) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+3}$.

e) $f(x) = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)}$.

f) $f(x) = \dfrac{-10x\mathrm{e}^{-5x^2}}{\mathrm{e}^{-5x^2}}$

Exercice 2.

Vérifiez que f est solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

a) $f : x \mapsto 5x^2 - 2x - 5$ et $(E) :\ y' = 10x - 2$.

b) $f : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-2x+1}$ et $(E) :\ y' = 2\mathrm{e}^{-2x+1}$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ et $(E) :\ y' = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

d) $f : x \mapsto \cos(x)$ et $(E) :\ y' = -\sin(x)$.

Exercice 3.

Déterminez une primitive de la fonction f sur I.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 7$ et $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = x^3 + x - 12$ et $I = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = x^6 + 3x^5 - x^4$ et $I = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = 0,1x^4 + \frac{x^2}{10} - \frac{x}{100}$ et $I = \mathbb{R}$.

e) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$ et $I =]0, +\infty[$.

f) $f(x) = \frac{5}{x^4} - \frac{4}{x^5}$ et $I =]0, +\infty[$.

g) $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2}$ et $I =]0, +\infty[$.

h) $f(x) = \frac{1}{3x^2} - \frac{3x^2}{2} + \frac{2}{3}$.

i) $f(x) = 10(2x+1)^4$ et $I = \mathbb{R}$.

j) $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ et $I = \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

k) $f(x) = \frac{-1}{2(x-2)^3}$ et $I =]2, +\infty[$.

l) $f(x) = \frac{2}{2x-6}$ et $I =]3, +\infty[$.

m) $f(x) = -\sin(-x)$ et $I = \mathbb{R}$.

n) $f(x) = 2\cos(2x+1)$ et $I = \mathbb{R}$.

o) $f(x) = -3\sin(x)\cos^2(x)$ et $I = \mathbb{R}$.

p) $f(x) = 3\mathrm{e}^{3x+1}$ et $I = \mathbb{R}$.

q) $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$ et $I = \mathbb{R}$.

r) $f(x) = 6\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x + 2\right)^5$ et $I = \mathbb{R}$.

s) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 3}$ et $I = \mathbb{R}$.

II Existence et non unicité.

Proposition 1

Toute fonction f continue sur un intervalle non trivial I admet une primitive sur I.

Proposition 2

Si F et G sont des primitives d'une fonction f continue sur un intervalle I alors $F - G$ est une fonction constante.

Corollaire 1

Soient a et b des réels.

Une fonction f, continue sur un intervalle I, admet une unique primitive F telle que $F(a) = b$.

Exercice 4.

On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(-x^2 + 2x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}$ et $F(x) = (x^2 - 1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Vérifiez que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déduisez-en la primitive G de f telle que $G(0) = 5$.

Exercice 5.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \frac{1}{x} - \mathrm{e}^x$.

1. Donnez une primitive de f sur $]0, +\infty[$.
2. Déduisez en toutes les primitives de f sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminez la primitive F de la fonction f telle que $F(1) = 0$.

Exercice 6.

Déterminez la primitive F de f sur I qui vérifie la condition initiale donnée.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2$, $I = \mathbb{R}$, $F(0) = 2$.

b) $f(x) = \cos(x)$, $I = \mathbb{R}$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2$, $I =]0, +\infty[$, $F(1) = 1$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, $I =]0, +\infty[$, $F(1) = 2$.

e) $f(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$, $I = \mathbb{R}$, $F(0) = 0$.

Exercice 7.

Déterminez l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \dfrac{6x + 3}{x^2 + x + 1}$.

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$.

c) $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$.

d) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.

Exercice 8.

Justifiez dans chaque cas que la fonction f admet des primitives sur l'intervalle I et déterminez une primitive de f sur I.

a) $f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{5x}{4}}$ et $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}\exp\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ et $I =]1, +\infty[$.

c) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + x}{\left(\mathrm{e}^{2x} + x^2\right)^4}$ et $I = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + 1}{\sqrt{\mathrm{e}^{x} + x}}$ et $I = [0, +\infty[$.

Exercice 9.

Exercice 10.

III Exercices.

Exercice 11.

Exercice 12.

Exercice 13.