# 39 Fonctions cosinus et sinus.

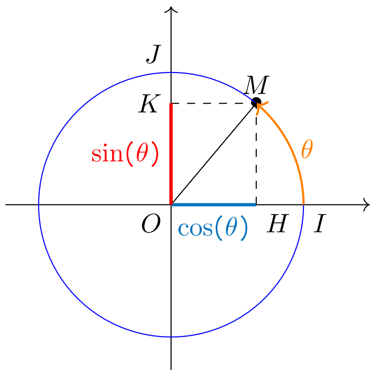
## I Cosinus et sinus d'un nombre réel.

### 1 Une définition.

**Définition 1**

Soit un angle de mesure $\theta$ en radian, repéré par un point $M$ sur le cercle trigonométrique.

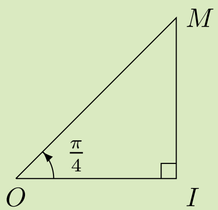
Nous définirons désormais :
- $\cos(\theta)$ comme l'abscisse de $M$,
- $\sin(\theta)$ comme l'ordonnée de $M$.




### 2 Des valeurs remarquables de sinus et cosinus.

**Exercice 1.**

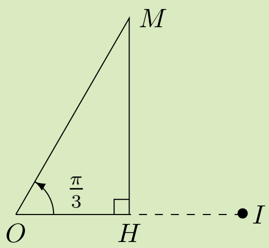
Soient $OIM$ un triangle rectangle en $I$ tel que $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{4}$.




1. (a) Donnez une mesure en degré de $\widehat{IOM}$.
   (b) Justifiez que $OIM$ est isocèle.
   (c) Exprimez $OI$ en fonction de $OM$.
2. Déterminez, grâce à la définition du cosinus vue au collège, une expression de $OI$ en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $OM$.
3. Nous supposons de plus que $OM = 1$. Déduisez-en une valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 2.

Soient $OHM$ un triangle rectangle en $H$ tel que $OM = 1$ et $\widehat{HOM} = \frac{\pi}{3}$, $I$ le symétrique de $O$ par rapport à $H$.




1. (a) Donnez une mesure en degré de $\widehat{HOM}$.
   (b) Justifiez que $OI = 1$.
   (c) Déduisez-en la longueur $OH$.
2. En utilisant la définition du cosinus vue au collège donnez une égalité liant $OH$ et $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Puis déduisez-en une valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
3. En remarquant que $MH = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, trouvez une expression radicale de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Le résultat à connaître par cœur est le suivant.

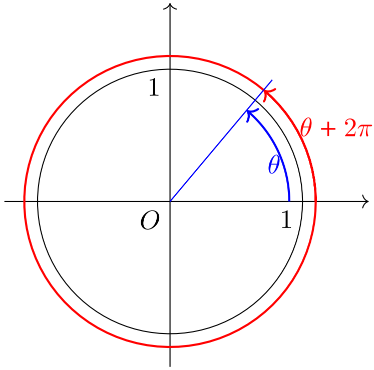
♥

| $\theta$ (en radian) | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(\theta)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\sin(\theta)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |

## II Propriétés des sinus et cosinus.

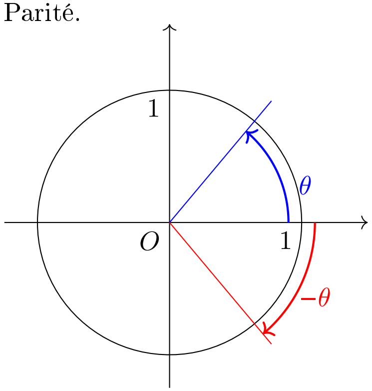
En raisonnant sur le cercle trigonométrique nous retrouvons aisément les formules suivantes.

Périodicité.



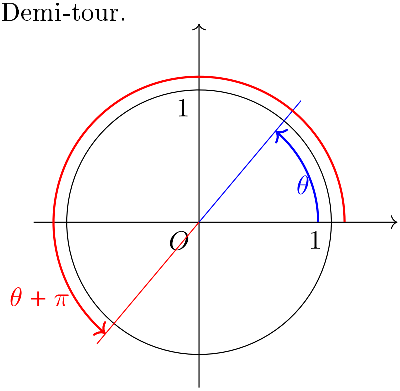

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$$
$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$$

Parité.



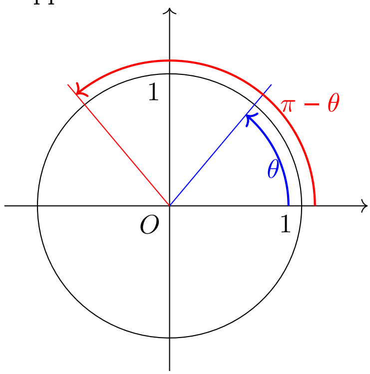

$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Demi-tour.



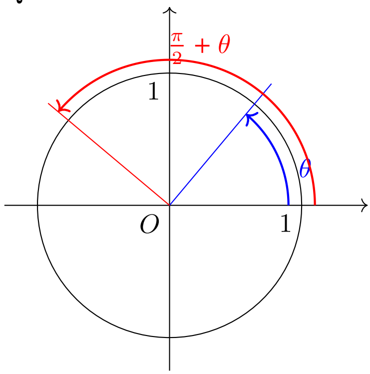

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

Supplémentaire.



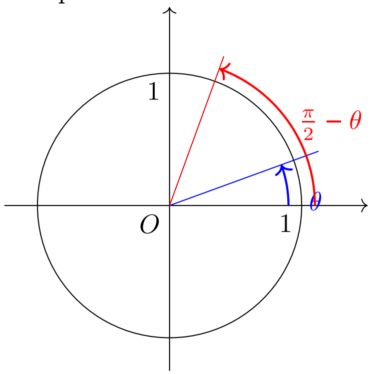

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

Quart de tour.




$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$$

Complémentaire.




$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$$

**Exercice 3.**

Déterminez si la fonction $f$ est paire, impaire, périodique.

a) $f(x) = 3\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$.

b) $f(x) = \sin(2x)\cos(x)$.

## III Dérivées.

La nouvelle définition des sinus et cosinus permet de définir des fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$.

**Proposition 1**

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\sin' = \cos \quad \text{et} \quad \cos' = -\sin\,.$$

**Corollaire 1**

Si $u : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur l'intervalle $I$ alors $\cos(u)$ et $\sin(u)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\cos(u)' = -u'\sin(u) \quad \text{et} \quad \sin(u)' = u'\cos(u).$$

**Exercice 4.**

Déterminez les dérivées de la fonction $f$ dont l'expression algébrique est donnée ci-après (sans se préoccuper de la dérivabilité).

a) $3\sin(x) - 2\cos(2x)$.

b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos(x)$.

c) $\sin(x)\cos(2x)$.

d) $\sin(2x-1)\cos\left(\frac{3}{4} - 2x\right)$.

e) $x^2 - \cos(x)$.

f) $x - \sin(2x)$.

g) $3\sin(x) - \cos(3x) + 3$.

h) $\sin^2(x)$.

i) $\cos^2(x)$.

j) $x^2\sin(x)$.

k) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

l) $\frac{5}{\cos(x)}$.

m) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

n) $\cos(4x)\sin(-4x)$.

Exercice 5.

On considère un circuit électromagnétique comprenant :

— un condensateur dont la capacité (exprimée en farad) est $C$,

— une bobine dont l'inductance (exprimée en henry) est $L$,

— un interrupteur.

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit. On nomme $q(t)$ la valeur de la charge, exprimée en coulomb, du condensateur à l'instant $t$. On définit ainsi une fonction $q$, dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

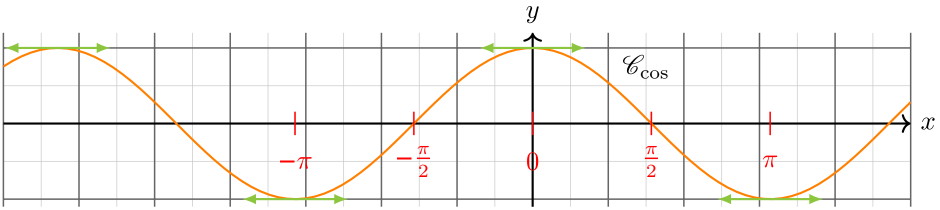
On admet que $q(t) = \dfrac{1}{200}\sin\left(200t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

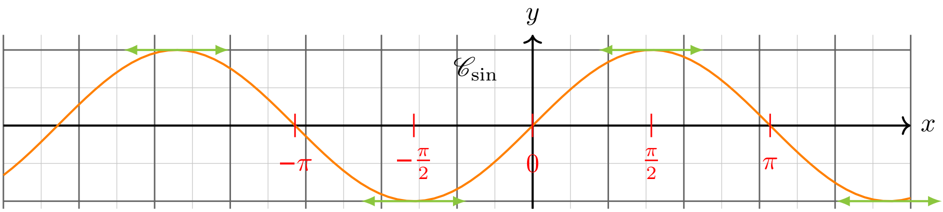
1. Montrez que $T = \frac{\pi}{100}$ est une période de $q$.
2. Montrez que la fonction $q$ n'est ni paire ni impaire.
3. Calculez la dérivée de la fonction $q$ et dressez son tableau de variation sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{100}\right]$.

Exercice 6.

## IV Courbes représentatives.

Tableaux de variations.




## V Des formules calculatoires.

*Formules d'addition.*

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(b)\sin(b)$$

Exercice 7.

1. Calculez $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ en utilisant la formule d'addition.
2. De $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ déduisez les valeurs de sinus et de cosinus $\frac{\pi}{12}$.

*Formules de linéarisation*.

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
$$\cos(x)\sin(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Exercice 8.

Soit $s$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $s(x) = (-1+\sin(x))(\sin(x)+1)$.
A FAIRE

Exercice 9.

Déterminez sans calcul le maximum sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$.

# VI Exercices.