38 Logarithme népérien, variation de la fonction.

I Monotonie.

Proposition 1

ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1.

Résolvez les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $\ln(x) < 3$.

b) $2\ln(x) + 200 > 0$.

c) $1 - 2\ln(x) \geqslant 0$.

d) $2\ln(x) - 4\ln(3) < 0$.

Exercice 2.

L'évolution d'une population d'animaux en fonction du temps est modélisée par la fonction P définie par $P(t) = 50\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$, où t est exprimé en années.

1. Au bout de combien d'années la population initiale aura-t-elle été multipliée par 2 ?
2. Au bout de combien d'année la population dépassera-t-elle les 10 000 individus ?

Exercice 3.

Déterminez le plus petit entier naturel n tel que

a) $0,99^n \leqslant 10^{-30}$.

b) $1,02^n > 10^{2024}$.

Exercice 4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 1,001$. Déterminez s'il existe un plus petit entier naturel n tel que $u_n > 100\,000$.

Exercice 5.

Résolvez les inéquations suivantes après avoir déterminé sur quel ensemble on peut le résoudre.

a) $\ln(3x - 4) < 0$.

b) $\ln(-x + 3) \geqslant 1$.

c) $\ln(-x + 1)\ln(x)$.

d) $\ln(3 + 2x) < \ln(x - 3)$.

II Signe.

Proposition 2

x	0		1		$+\infty$
$\ln$	||	$-$	0	$+$	

Exercice 6.

Résolvez les inéquations suivantes.

a) $\ln(x+1) > 0.$

b) $\dfrac{\ln(x)-1}{x^2+1} > 0.$

c) $\dfrac{\ln(x)}{x^2-3x+2} > 0.$

d) $[\ln(x)]^2 - 5\ln(x) + 4 < 0.$

III Régularité.

Proposition 3

ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 4

ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

IV Convexité.

Proposition 5

ln est concave (sur $\mathbb{R}_+^*$).

V Limites.

Proposition 6

$$\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \ln(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} -\infty$$

Exercice 7.

Déterminez la limite en a des fonctions f et g suivantes.

a) $f(x) = 2\left[\ln(x)\right]^2 + 3\ln(x) + 1$ avec $a = +\infty$.

b) $g(x) = -\left[\ln(x)\right]^2 + \ln(x)$ avec $a = 0$.

VI Fonctions composées avec ln.

Proposition 7

Si u est une application dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ alors $\ln \circ u$ est dérivable sur I et

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}.$$

VII Croissances comparées.

Nous devons comparer la croissance de ln à celle de $x \mapsto x^n$ et exp en $+\infty$ et en 0.

Proposition 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n \ln(x) = 0.$$

Exercice 8.

Déterminez la limite en a des fonctions f et g suivantes définies sur $]0;+\infty[$.

1. $f(x) = \left(e^x - 1\right)(1 - \ln(x))$ avec $a = +\infty$.
2. $g(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{x}$ avec $a = 0$.

Exercice 9.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{2x+1}$.

1. Déterminez la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
2. (a) Vérifiez que pour tout réel $x>0$: $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}\times\dfrac{1}{2+\frac{1}{x}}$.

   (b) Déduisez-en la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. interprétez graphiquement les résultats précédents.

Exercice 10.

a et b étant deux nombres réels donnés, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=a+b\frac{\ln(x)}{x}$.
Sachant que $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale $\mathscr{D}$ d'équation $y=1$ et une tangente $\mathscr{T}$ au point d'abscisse 1 d'équation $y=-x+2$, déterminez les valeurs de a et b.

VIII Exercices.

Exercice 11.

Exercice 12.

Déterminez les limites de f au bornes de son domaine de définition $\mathscr{D}$.

a) $f(x)=\ln(3x-1)$ et $E=\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$.
b) $f(x)=\ln(-x^2+4x)$ et $E=]0;4[$.
c) $f(x)=\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$ et $E=\mathbb{R}$.
d) $f(x)=x\ln(5x)$ et $E=]0;+\infty[$.
e) $f(x)=\ln\left(x+\mathrm{e}^{-x}\right)$ et $E=\mathbb{R}$.

Exercice 13.

Soient f la fonction définie sur $]-2;2[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Justifiez que f est définie sur $]-2;2[$.
2. Montrez que f est impaire puis interprétez graphiquement ce résultat.
3. Démontrez que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes que vous préciserez.
4. Étudiez le sens de variation de f puis donnez son tableau de variation.

Exercice 14.

Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\ln(2x-1)-x+1$.

1. Déterminez la limite de $f(x)$ en $\frac{1}{2}$.
2. Montrez que pour tout réel $x>\frac{1}{2}$: $f(x)=\ln(x)-x+1+\ln\left(2-\frac{1}{x}\right)$. Déduisez-en la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrez que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions distinctes α et β ($\alpha<\beta$).
4. Donnez la valeur exacte de α et un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 15.

Dans une pièce à la température constante de 20°C on prépare un tasse de thé. À l'instant initial $t=0$ la température du thé est égale à 100°C. Quatre minutes plus tard elle est de 80°C.
On admet que la température du thé $f(t)$ en °C, est donnée par $f(t)=C\mathrm{e}^{at}+20$ où t désigne le temps en minute et a et C sont des constantes réelles.
Au-dessus de 50°C le thé est trop chaud et on ne peut le boire.
Combien de temps faudra-t-il attendre pour boire le thé ?

Exercice 16.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculez la limite de f en 0.
   (b) Déterminez la limite de f en $+\infty$. Donnez-en un interprétation graphique.
2. (a) Montrez que pour tout réel $x>0$: $f'(x)=\dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$.
   (b) Déduisez-en les variations de f sur $]0,+\infty[$
3. (a) Montrez que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses dont vous préciserez les coordonnées.
   (b) Déduisez-en, le signe de f sur $]0,+\infty[$.

Exercice 17.

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$. Montrez que la fonction g est positive sur $[1,+\infty[$.
2. (a) Montrez que, pour tout x de $[1,+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
   (b) Déduisez-en le sens de variation de f sur $[1,+\infty[$.
3. On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Étudiez la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
4. Pour tout entier naturel k supérieur ou égale à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.
   (a) Déterminez la limite de M_kN_k lorsque k tend vers $+\infty$.
   (b) Écrivez un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier k_0 supérieur ou égale à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

Exercice 18.

Exercice 19. B

Identifier parmi les suites dont le terme général est donné ci-après, les situations conduisant à une forme indéterminée lors de l'étude de la convergence, sinon donnez la limite.

On peut schématiquement résumer les formes indéterminées par :

$$(+\infty)-(+\infty), \quad (-\infty)-(-\infty), \quad 0\times\infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{}{0^?}.$$

a) $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2^n}$.
b) $n^2 - 6^n$.
c) $\ln(n^{-1}) + n!$.
d) $2^{-n} + \ln(n)$.
e) $n^{12} + \dfrac{1}{n^{100}}$.
f) $\dfrac{1}{\ln(n)} + n! + 1$.
g) $n^2 3^n$.
h) $\dfrac{n^2}{n^{12}}$.
i) $\dfrac{n!}{2^n}$.
j) $n^{-2}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$.
k) $\dfrac{n^{-3}}{\ln(n)}$.
l) $n^5 2^{-n}$.
m) $n^{-3} + 0,5^n \ln(n)$.
n) $\dfrac{1}{n^4} \times \mathrm{e}^n + 4$.
o) $\dfrac{\ln(n)}{\mathrm{e}^n}$.

Exercice 20. B

Déterminez, si possible la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

a) $n^7 + 12$.

b) $4^n - 7$.

c) $n^3 + \dfrac{0,1^n}{\ln(n)}$.

d) $\dfrac{1}{n} + 4$.

e) $n^{-4} + \ln(n)$.

f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2 + \dfrac{1}{n^2}$.

g) $n!n^2 + 2 - \dfrac{1}{n^2}$.

h) $\dfrac{\ln(n)}{2 + \mathrm{e}^{-n}}$.

i) $\dfrac{n^4 + 1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 4}$.

j) $\dfrac{n \times 2^n}{3 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}$.

k) $n! - \left(2 - n^2\right)$.

l) $n^2\left(n^3 + \dfrac{3}{\ln(n)} + 1\right)$.

m) $2n^3 + 5n^2 + n - 12$.

n) $-5n^3 - 2n^2 - 12n - 3$.

o) $4n^2 - n + 1$.

p) $\dfrac{n^3}{n^2}$.

q) $n^2 + 3^n + 4 - \dfrac{1}{n}$.