37 Logarithme népérien, propriétés algébriques.

I Définition.

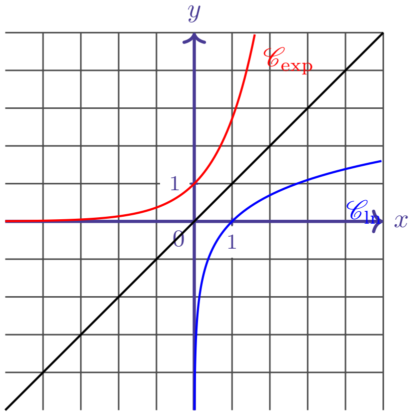
Nous avons établi avec le théorème de la bijection que exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 1

On appelle *logarithme népérien* et on note ln l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui est la réciproque de la fonction exponentielle.

Remarques.

1. Si $\exp : x \mapsto y$ alors la fonction qui fera le lien réciproque $y \mapsto x$ a sa courbe représentative symétrique par rapport à la première bissectrice de celle exp.



2. Ainsi ln est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à chaque $x \in]0, +\infty[$ associe l'unique nombre réel y tel que $x = \mathrm{e}^y$.
3. Nous retiendrons que par définition de ln :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^{\ln(x)} = x.$$
et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x.$$
4. En utilisant la loi de composition des fonctions le précédent résultat devient : $\ln \circ \exp(x) = x$ et $\exp \circ \ln(x) = x$.
5. $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

Exemples.

1. $e^x = 1 \Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln(1) \Leftrightarrow x = 0$.
2. $e^x = 14 \Leftrightarrow x = \ln(14)$.

Exercice 1.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $2e^x - 3 = 0$.

b) $e^{-x+1} - 1 = 0$.

c) $e^{2x} = 4$.

d) $\left(2e^x - 1\right)\left(e^x + 5\right) = 0$.

e) $-5e^x - 10 = 0$.

f) $7 - e^{5x-2} = 0$.

g) $e^{-3x} - 1 = 0$.

h) $e^x\left(e^x - 9\right) = 0$.

i) $e^{2x} + 3e^x = 0$.

Exercice 2.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\ln(x) = 3$.

b) $\ln(x) = -7$.

c) $2\ln(x) - 1 = 0$.

d) $(\ln(x) + 5)(4\ln(x) - 5) = 0$.

e) $(\ln(x))^2 = 9$.

f) $\ln(x) = -5$.

g) $-6\ln(x) + 3 = 0$.

h) $\ln(x)(2\ln(x) - 7) = 0$.

i) $(\ln(x))^2 - \ln(x) = 0$.

j) $(\ln(x))^3 - 2(\ln(x))^2 = 0$.

Exercice 3.

Déterminez l'ensemble (le domaine) de définition de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) $f(x) = \ln(x + 1)$.

c) $f(x) = \ln\left(\frac{3x-1}{4x+11}\right)$.

d) $f(x) = \ln\left(\frac{2}{3}x + \frac{9}{7}\right)$.

e) $f(x) = \ln(x^2)$.

f) $f(x) = \ln((x - 2)(3x - 4))$.

g) $f(x) = \ln\left(e^x - 1\right)$.

h) $f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 1)$.

i) $f(x) = \ln(x + 1) + \ln(x^2 - 4)$.

II Propriétés algébriques.

Proposition 1

Soient $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

(ii) $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

(iii) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

(iv) $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$.

(v) $\ln(a^{-n}) = -n\ln(a)$.

(vi) $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Démonstration

(i) D'une part

$$\exp\left(\ln(ab)\right) = ab,$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \exp\left(\ln(a) + \ln(b)\right) &= \exp\left(\ln(a)\right) \times \exp\left(\ln(b)\right) \\ &= ab \end{aligned}$$

donc $\exp\left(\ln(ab)\right) = \exp\left(\ln(a) + \ln(b)\right)$.
En composant par ln ou en utilisant les résultats vus en première : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

(ii) $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(1) = 0$.

(iii) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a\right) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

(iv) Par récurrence.

(v) D'après (ii) et (iv).

(vi) $\ln(a) = \ln\left(\sqrt{a}^2\right) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$.

■

Exercice 4.

Simplifiez les nombres suivants pour les écrire en fonction de $\ln(3)$ uniquement.

a) $\ln(9)$.

b) $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

c) $\ln\left(3\sqrt{3}\right)$.

d) $\ln(36) - 2\ln(2)$.

Exercice 5.

Simplifiez les nombres suivants pour les écrire en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$ uniquement.

a) $\ln(10) - \ln\left(\frac{1}{4}\right)$.

b) $\ln(0,05)$.

c) $\ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

d) $2\ln\left(5\mathrm{e}^2\right) + \ln\left(4\mathrm{e}^{-1}\right)$.

Exercice 6.

Simplifiez les expressions suivantes.

a) $A = \ln\left(\mathrm{e}^4\right) + 3\ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right)$.

b) $B = \mathrm{e}^{2\ln(5)} - \ln\left(\left(\mathrm{e}^5\right)^2\right)$.

c) $C = \ln\left(\mathrm{e}^{-3}\right) \times \ln\left(\mathrm{e}^3\right)$.

d) $D = 20\ln\left(\sqrt{e}\right) - \mathrm{e}^{3\ln(3)}$.

III Exercices.

Exercice 7.

Déterminez la valeur exacte de $S = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{49}{50}\right)$.

Exercice 8.

Démontrez que

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) = -x + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{x}\right)$.

b) $\forall x > -1,\ 2\ln(x+1) = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2x}\right) = -2x + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{2x}\right)$.

Exercice 9.

Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \ln(3x - 7)$.

b) $g(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$.

c) $h(x) = \ln(x) - 3\ln(2 - x)$.

Exercice 10.

Résolvez les équation suivantes après avoir déterminé l'ensemble sur lequel on peut les résoudre.

a) $\ln(x) = \ln(x+2)$.

b) $\ln(-x+3) = \ln(3x+5)$.

c) $\ln(2x^2+4) = \ln(-5x+1)$.

d) $\ln(x^2) = \ln(x) + \ln(6)$.

e) $\ln(x+1) + \ln(x-4) = \ln(5)$.

f) $2\ln(x) = \ln(5x-3)$.

g) $\ln\left[(x-3)(2x+1)\right] = \ln(4)$.

h) $\ln(x-3) + \ln(2x+1) = 3\ln(2)$.

Exercice 11.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $[\ln(x)]^2 - 2\ln(x) - 3 = 0$.

b) $4[\ln(x)]^2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 3 = 0$.

c) $4\mathrm{e}^{2x} + 7\mathrm{e}^{x} - 2 = 0$.

d) $\ln(-x) = \ln\left(x^2-1\right)$.

e) $\ln\left(2-\mathrm{e}^{x}\right) - \ln\left(2\mathrm{e}^{x}-1\right) = 0$.

f) $\ln(4) + \ln(x-1) = 2\ln(x)$.

g) $\left(2x^2+3x-6\right)\ln(1-x) = 0$.

h) $\ln\left(\mathrm{e}^{x}-1\right) + \ln\left(\mathrm{e}^{x}+1\right) = 1 + \ln(2)$.

i) $\ln(x+1) - \ln(x) = 2\ln(3)$.