36 Systèmes linéaires pour la géométrie.

I Résoudre un système linéaire par substitution.

Un système d'équations est un ensemble d'équations qui doivent être toutes simultanément vraies : on cherche des solutions qui fonctionnent pour toutes les équations.

Vous avez appris à transformer des équations sans modifier l'ensemble des solutions (on dit alors que les équations sont équivalentes). De même il est possible de transformer des systèmes d'équations sans modifier l'ensemble des solutions en respectant certaines règles.

1. Il est possible d'intervertir les équations d'un système.
2. Il est possible de remplacer une équation par cette équation multipliée par un nombre non nul.
3. Il est possible de remplacer une équation par la somme de cette équation et d'une autre équation du système.

Exemples.

1. Les systèmes $\left\{\begin{array}{ccccc} 4x & + & 3y & = & 4 \\ 2x & - & 2y & = & 7 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & - & 2y & = & 7 \\ 4x & + & 3y & = & 4 \end{array}\right.$ sont équivalents car on a simplement interverti les lignes $L_1 \leftrightarrow L_2$.
2. Les systèmes $\left\{\begin{array}{ccccc} 4x & + & 3y & = & 4 \\ 2x & - & 2y & = & 7 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccccc} 4x & + & 3y & = & 4 \\ -4x & + & 4y & = & -14 \end{array}\right.$ sont équivalents car on a simplement multiplié la seconde ligne par -2 : $L_2 \leftarrow -2L_2$.
3. Les systèmes $\left\{\begin{array}{ccccc} 4x & + & 3y & = & 4 \\ -4x & + & 4y & = & -14 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccccc} 4x & + & 3y & = & 4 \\ & & 7y & = & -10 \end{array}\right.$ sont équivalents car on a remplacer la seconde ligne par la somme des deux lignes : $L_2 \leftarrow L_1 + L_2$.

Les deux dernières règles peuvent se résumer en celle-ci : il est possible de remplacer une ligne par une combinaison linéaire non nulle de cette ligne et d'autres lignes du système.

Exemples.

1. Les systèmes $\left\{\begin{array}{ccccc} 4x & + & 3y & = & 4 \\ 2x & - & 2y & = & 7 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccccc} 4x & + & 3y & = & 4 \\ & & 7y & = & -10 \end{array}\right.$ sont équivalents car on a fait : $L_2 \leftarrow 1L_1 - 2L_2$.

Dans un système linéaire on peut, par combinaisons linéaires, éliminer des inconnues de lignes. On trouve alors les valeurs des inconnues en procédant par substitution.

Exemples.

1. Du système $\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ 7y = -10 \end{cases}$ on déduit avec la seconde ligne $y = -\frac{10}{7}$ puis en substituant dans la première : $4x + 3 \times \left(-\frac{10}{7}\right) = 4$ et donc $x = \frac{29}{14}$.
   Le système admet donc une unique solution, à savoir le couple $\left(\frac{29}{14}; -\frac{10}{7}\right)$.

Exercice 1.

Résolvez les systèmes.

a) $\begin{cases} 6x + 3y = 9 \\ -2x + 5y = 39 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 15x - 4y = 3 \\ -3x + 5y = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 7y = 14 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -2x + 13y = 67 \\ 7x - 4y = -27 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x + y = 24 \\ x - 3y = -7 \\ 5x + 7y = 53 \end{cases}$

II Des situations de géométrie conduisant à des systèmes.

1 Déterminer si trois vecteurs forment une base.

Exercice 2.

Déterminez si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, dont les coordonnées sont données dans un repère orthonormé de l'espace, forment une base de l'espace.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2 Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base.

Exercice 3.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ les coordonnées étant données dans une base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On admet que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
Déterminez les coordonnées du vecteur $\vec{t}$ sachant que, dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, ses coordonnées sont $\vec{t}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3 Colinéarité.

Exercice 4.

4 Alignement dans l'espace.

Exercice 5.

Soient $A\left(\frac{5}{2};4;-4\right)$, $B\,(1;-2;-1)$ et $C(2;3;-3)$ des points dont les coordonnées sont données dans un repère orthonormé de l'espace.

1. Déterminez les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires c'est dire qu'il existe existe un réel α tel que $\alpha\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Déduisez-en un système ayant α pour inconnue et formé de 3 équations.
3. Résolvez le précédent système.
4. Concluez quant à l'alignement des points A, B et C.

5 Parallélisme.

Exercice 6.

Exercice 7.

6 Coplanarité

Exercice 8.

1. Résolvez le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} 4x & + & y & + & z & = & 0 \\ -x & - & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$.
2. Déduisez-en si les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont coplanaires ou pas.

7 Intersection de droites ou plans.

Exercice 9.

Exercice 10.

Exercice 11.

8 Orthogonalité de droites ou plans.