# 35 Bijection.

## I Définition.

Définition 1

Soient :

. $E$ et $F$ des ensembles de nombres réels non vides,

. $f : E \to F$ une application.

Nous dirons que *$f$ réalise une bijection de $E$ sur $F$* si et seulement si tout élément de $F$ est l'image d'un unique élément de $E$.

Exemples.

Les exemples qui suivent ne sont pas démontrés ils relèvent de la lecture intuitive des courbes représentatives. Pour un résultat démontrant l'existence d'une bijection *confer infra*.

1. Carré n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$.
2. Racine carrée réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. La restriction de carré réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. Les fonctions trigonométriques ne sont pas des bijections sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Une fonction affine.

Proposition 1

Soient :

. $E$ et $F$ des ensembles de nombres réels non vides,

. $f : E \to F$ une application.

Si $f$ réalise une bijection de $E$ sur $F$ alors il existe une fonction notée $f^{-1}$ et appelée *réciproque* de $f$ telle que, si $f(x) = y$ alors $f^{-1}(y) = x$.

Exemples.

1. Fonction affine : si $f(x) = 2x + 1$ alors $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$.

Remarques.

1. Une propriété caractéristique de la fonction réciproque : $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$.
2. Les $\cos^{-1}$ et autres de la calculatrice.
3. Si une fonction admet une réciproque alors elle est une bijection.

Théorème 1

Soient :

. $E$ et $F$ des ensembles de nombres réels non vides,

. $f : E \to F$ une application et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

$f$ réalise une bijection de $E$ sur $F$ si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la première bissectrice, *i.e.* la droite d'équation $y = x$.

## II L'aspect géométrique.

## III Théorème de la bijection.

Théorème 2

Soient :

. $E$ et $F$ des ensembles de nombres réels non vides,

. $f : E \to F$ une application.

Si $f$ est continue et strictement monotone sur $I$ alors $f$ réalise une bijection de $E$ sur $f(E)$.

Démonstration

Découle du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans le cas d'une fonction continue et strictement monotone.

■

Exemples.

1. Les fonctions affines non constantes réalisent des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Cube et sa réciproque.

Corollaire 1

La fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.