34 Théorème des valeurs intermédiaires.

I Le théorème.

Théorème 1 - des valeurs intermédiaires.

Soient :

. a et b des réels avec $a < b$,

. f une fonction définie et continue sur $[a, b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarques.

1. Si f est continue sur le segment $[a, b]$ alors f atteint toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.
2. Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes.
3. L'image continue d'un intervalle I est un intervalle noté $f(I)$.
   De plus l'image continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.

Exercice 1. C

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 8}{x^2 + 1}$ une fonction définie sur $[0; 1]$.

1. Calculez $f(0)$ et $f(1)$.
2. Justifiez que l'équation $f(x) = -5$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.
3. Les plus braves déterminerons l'ensemble des antécédents de -5.

Exercice 2. C

Démontrez que l'équation $\sqrt{x} + \mathrm{e}^x - 2 = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

II Cas des fonctions monotones.

Les différentes images continues d'intervalles.

Soit f une fonction continue et monotone sur un intervalle I. a et b sont dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ suivant les cas.

I	Croissante sur I, alors $f(I) =$	Décroissante sur I, alors $f(I) =$
$[a,b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x), f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x), \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$

Exercice 3. C

Déterminez $f(]2;+\infty[)$ lorsque $f : x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{x^2-4}\right)$.

III Cas des fonctions strictement monotones.

Corollaire 1 - Unicité de l'antécédent.

Soient :

. a et b des réels avec $a < b$,

. f une fonction définie sur $[a,b]$.

Si f continue est strictement monotone sur $[a,b]$ alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarques.

1. Pour $k = 0$ alors il suffit de s'assurer que la fonction est continue, strictement monotone et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires pour affirmer l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$. Pour montrer que que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire il suffit de vérifier que $f(a)f(b) < 0$.

2. On peut étendre le corollaire en travaillant avec des intervalles semi-ouverts ou ouverts ($]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$) a et b étant pris dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Dans ce cas on considère $\lim_a f$ et $\lim_b f$ à la place de $f(a)$ et $f(b)$. *Confer supra.*

Exercice 4. C

Soit $f : x \mapsto x^3 - 6x + 1$ une fonction définie sur $[-2; +\infty[$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.
2. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[2; +\infty[$.

Exercice 5. C

Soit $f : x \mapsto x^3 - 8x + 1$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-1; 1]$.

Exercice 6. C

Soit $f : x \mapsto 4x^5 + 2x - 2$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution que nous noterons α.
2. Déterminez un encadrement de α à 10^{-2}.

IV Exercices.

Exercice 7.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. Étudiez les variations de g.
2. Montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α. Donnez un encadrement de α à $0,1$ près.
3. Déterminez le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 - x}{x^3 + 1}.$$

   (a) Calculez $f'(x)$ puis exprimez $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
   (b) Déduisez-en le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 8. D

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

1. Étudiez les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminez le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+$ de l'équation $f(x) = 2$.

Exercice 9. D

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 1.$$

1. Calculez pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Déterminez le signe de $f''(x)$ puis dressez le tableau de variation de f'.
3. (a) Montrez que l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$ donc on donnera en encadrement à $0,1$ près.
   (b) Déduisez-en le signe de f' sur $\mathbb{R}$
   (c) Dressez le tableau de variation de f.

Exercice 10. E

On veut résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation : $3x - 2\cos(x) - 2 = 0$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = 3x - 2\cos(x) - 2$. Étudiez les variations de f.
2. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, \pi]$. Donner à la calculatrice un encadrement à $0,1$ près de α.

Exercice 11. D

— Baccalauréat S Asie 18 juin 2013 Exercice 2.
— Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie 14 novembre 2013 Exercice 1
— Baccalauréat S Polynésie 17 juin 1999. Problème, partie A.

34 Théorème des valeurs intermédiaires.